解析学概論講義

白石直人

1　数列の極限

1.1　ε-N 論法による定義

極限の式 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ は、直感的には「n をとても大きくすると、x_n は 0 に近づいていく」ということであった。ここでは、極限や収束をきちんと数学的に定義する方法と、その基礎にある考え方・モチベーションを見ていこう。（なおここでは実数の連続性は仮定し、それについての議論は後で述べる）。

例えば、$a_n = 1/2^n$ であれば、この数列は

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \cdots \tag{1}$$

とどんどんゼロに近づいていく様子が容易に見て取れる。このような数列の場合には、どんな極限や収束の定義をしても、大体の場合問題は起きないし、これが 0 に収束することに異論がある人はほとんどいないだろう。

では、次のような数列はどうであろうか。

$$b_n = \begin{cases} 1 & : n \text{ が } 2 \text{ のべき乗の場合} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{2}$$

この数列は、n が大きくなると 0 を取る割合はどんどん増えていく。しかし、n がどんなに大きくなっても、b_n が 1 となるような n は存在しているため、「b_n が 0 に収束した」と言うのには違和感がある人も多いだろう。この「違和感」は、次のような数列を考えると、さらに増してくる。

$$c_n = \begin{cases} n & : n \text{ が } 2 \text{ のべき乗の場合} \\ 0 & : \text{それ以外} \end{cases} \tag{3}$$

n が大きくなると 0 を取る割合はどんどん増えていくのは相変わらずだが、n が大きい際の「0 でない c_n の値」はどんどん大きくなり 0 から外れていってしまう。例えば「c_n の 1 から n までの平均値」は、n が大きくなっても 0 には向かってくれない（1/2 と 1 の間を動く）。

このような数列は「収束する数列」としては望ましくない。そのため、「収束の定義」には

- x_n が 0 に収束するためには、十分大きな「すべての n」について、x_n が「0 に近い値」をとっている必要がある

という性質を入れておくのがいいだろう。

しかし、直感的な収束の議論だと曖昧な部分はまだいろいろある。「0 に近い値」というのは、具体的にはどのぐらい近いのだろうか。例えば「x_n が 10^{-8} より小さくなったら、0 に近いとみなそう」という基準を用いるとしよう。10^{-8} は 1 億分の 1 なので、確かにこれは 0 に近そうに見える。しかし、そうすると数列として

$$d_n = \frac{1}{2\cdot 10^8} \qquad \text{値は } n \text{ によらず一定} \tag{4}$$

というものを考えると、これは明らかに 0 ではない値に収束しているにもかかわらず、上の基準だと 0 に収束したことになってしまう。この問題は、「0 に近い値」を具体的に固定してしまう限り回避できない。そのため、ここから

- 「0 に近い値」がいくつなのかは先に決めておいてはダメで、いくらでも小さな値が後から選べるようにしておかないといけない。

という教訓が得られる。気分的には「0への近さ」は「要求水準」であり、要求水準はいくらでも引き上げられるようにしておきたい、ということである。

では、「0に近い値」の要求水準を決めたとして、「十分大きなnでは0に近い値をとる」というときの「十分大きなn」は、どのくらいnを大きくすればいいのだろうか。例えば1億（$=10^8$）というのは大きな数に感じられる。なので、「$n=10^8$（及びその前後）でのx_nの値を見て、その値が0に近いか判断する」というのは、極限の判定として一見よさそうな気もする。しかし、こういう数列も考えられる。

$$e_n = \begin{cases} 0 & : n \text{が2億より小さい場合} \\ 1 & : n \text{が2億より大きい場合} \end{cases} \tag{5}$$

どう見てもこの数列は「1に収束している」と言いたいが、$n=10^8$を使う判定条件だと、この数列は「0に収束している」ことになってしまう。「10^8以上のすべてのnを見る」ことにすれば、e_nが0に収束するという結論は避けれるが、それでも10^8以上のnではe_nは0も1もとるので、「この数列はどこにも収束していない」という、やはりうれしくない結論になってしまう。この数列はずいぶん意地悪なものだと言いたくもなるだろうが、こういう例もある。

$$f_n = \frac{1}{\ln|\ln|\ln n||} \tag{6}$$

$n=10^8$を代入すると、$f_n=0.935\cdots$であり、全然0に近くない。$n=10^{12}$（1兆）にしても、まだ$f_n=0.833\cdots$である。にもかかわらず、$\ln n$が発散することを知っている我々としては、分母が発散することは目に見えるため、「f_nは0に収束する」となってほしい。

こういう例から

- 「十分大きなn」の値は先に決めておいてはダメで、数列と「0への近さの水準」が与えられてから適宜調整できるようにしないといけない

という教訓が得られる。

今まで見た点をふまえて、収束の定義として、以下を採用することにしよう。

定義：収束

「数列x_nが値yに収束する」とは、以下の手続きが、「yへの近さの度合い（要求水準）$\varepsilon>0$」としてどんな（小さな）数εが選ばれても実行可能であることをいう。

1. 要求水準$\varepsilon>0$が与えられる。
2. （εの値を見たうえで）基準となる「十分大きなN」を決める。
3. すると、基準値N以上のどんなnを見ても、要求水準を満たしている（$|x_n-y|<\varepsilon$が成り立つ）。

どんな要求水準（小さなε）を課されても、十分高い基準（大きなN）を課せば要求をクリアできるときに「数列x_nはyに収束する」という。逆に、ある程度以上厳しい要求水準を課されると、もはやどんな基準を用いても要求がクリアできないとき「数列x_nはyに収束しない」という[1]。

この定義を用いるとどうなるか、今まで見た例で確認しよう。

a_nの場合、与えられたεに対し$N>-\log 2\varepsilon$を満たすようにNをとれば、上記手続きは実行できるため、a_nは0に収束する。

f_nの場合も、与えられたεに対し$N>e^{e^{e^{1/\varepsilon}}}$を満たすように$N$をとれば、上記手続きは実行できるため、$f_n$も0に収束する。

一方b_nの場合、1より小さいεが与えられてしまうと、どんなNを選んでも、$n>N$で$x_n=1$となるようなnが存在するため、b_nは0に収束しない。

[1] 数列x_nが与えられたとき、何か収束先yが存在して、数列x_nはyに収束することがいえるとき、「数列x_nは収束する」という。逆に、どんなyについても数列x_nはyに収束しないとき、「数列x_nは収束しない」という。

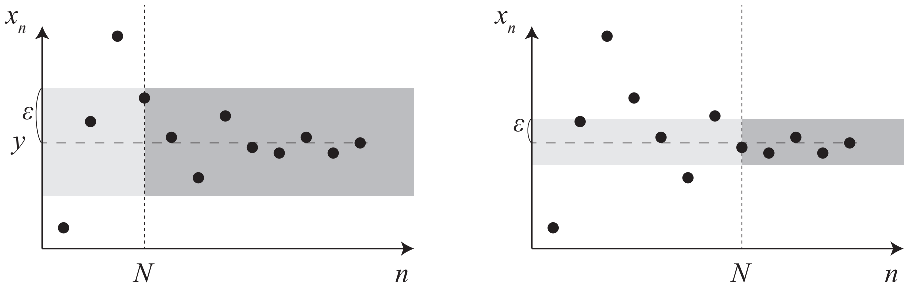

Figure 1: ε-N 論法のイメージ図。要求水準 ε が厳しくなっていくにつれて、基準 N が大きくなっていく。

また d_n の場合、$1/2 \cdot 10^{-8}$ より小さい ε が与えられてしまうと、どんな N を選んでも上記手続きは実行できないため、d_n は 0 に収束しない。

極限を $\varepsilon - N$ によって厳密に定義したことの特徴を一言でまとめるなら、「収束の速さを制御する」ことにあるといえる。高校までの直感的な極限の定義では、収束することは分かっても、どのぐらいの速さで収束するかについての情報や特徴づけはどこにもなかった。しかし、複数の変数が同時に変化する場合や、ある数列を用いて別の数列を定義する場合などには、それぞれの収束がどの程度の速さなのかが分からないと議論できなくなってしまうことが多々ある。後述する各点収束と一様収束の違いなどは、まさにこの「収束の速さ」の違いが決定的な差異をもたらす事例である。

さて、このような抽象的な定義が特に役立つのは、抽象的な定理を証明するときである。とりわけ、収束先が何であるかは関係なく「収束すること」が仮定されたり証明したかったりするときには、直観的な定義に基づいての証明はなかなか難しい。練習問題を一つ挙げておこう。

[1] $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ とする。このとき、N までの a_n の平均も A に収束する、すなわち

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n = A \tag{7}$$

が成り立つことを示せ。

1.2　コーシー列の収束

最初に述べた収束の定義では、「値 y に収束する」という形で定義されていたので、数列の収束をいうためには、数列の収束先を指定してあげる必要があった。しかし、収束先はわからない or 不問だが、ある数列が収束するという性質だけを議論したい場合も多々ある。そこで、収束先を指定せずに、数列の収束だけをうまく議論するために、コーシー列（Caucy sequence）というものを導入しよう。定義の仕方は先程の極限の場合と似ている。

定義：コーシー列

数列 x_n がコーシー列であるとは、どんな要求水準 $\varepsilon > 0$ に対しても、十分大きな N が存在し、N 以上の任意の $n, m \geq N$ について

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \tag{8}$$

が成り立つことをいう。

要するに、基準 N より大きいところでは、数列が決して ε 以上離れないことを言っている。(隣同士の数列の値の比較 $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ ではない点に注意。実際、$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とすると、$|x_n - x_{n-1}|$ は上から押さえられるが、x_n そのものは発散する）

ある数列がコーシー列であることと、ある数列が収束することは等価である。(本当はこれを示すには実数の連続性が必要だが、その議論は後の章に回し、ここでは実数の性質は知っているものとみなして話を進める）

定理

ある数列が収束することと、ある数列がコーシー列であることは同値である。

コーシー列が収束することが利用できる定理を一つ見ておこう。

ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理（Bolzano-Weierstrass theorem）

上下に有界な数列は、収束する部分列を持つ。

この主張を式で書くと以下の通り。数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が、ある実数 M について $|a_n| < M$ を満たす（上下に有界である）とする。このとき、適切な狭義単調増大な自然数の無限列 $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ が存在し、$b_i := a_{n_i}$ とすると、$\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ を収束する数列にすることができる。

[2] ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理を証明せよ。
（ヒント：$\{a_n\}$ を 0 以上をとるものと 0 以下をとるものに分けると、少なくとも一方は無限の要素を持つ。0 以上の方の集合が無限の要素を持つとすると、次に 0 以上 $M/2$ 以下と、$M/2$ 以上 M 以下で分けると、やはり少なくとも一方は無限の要素を持つ。これをいくらでも繰り返せることを使う。）

2　関数の極限と連続性（ε-δ 論法）

歴史的には、関数の連続性は「見ればわかる」話であった。確かに関数がグラフとして図示可能な場合には、関数の連続性はわざわざ厳密な取り扱いをする必要のないものであった。しかし、例えば、以下のディリクレ関数（Dirichlet function）

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \text{ が有理数のとき} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases} \tag{9}$$

は、もはや図示することなど出来ない関数であり、そのため「ディリクレ関数は $x = \sqrt{2}$ で連続か」などといった問いも「見ればわかる」という形で解決することはできない。後述するトーメ関数もそのような「図示できない関数」の例である。このような関数が考察の対象に入るようになると、関数の連続性もまた厳密に定義する必要が出てくるものとなった。

関数の連続性（ε-δ 論法）もまた、極限の定義とほとんど同じ考え方に基づいて定義することができる。関数 $f(x)$ が点 x で連続であることの直感的な理解は、「x の近くでは、関数は $f(x)$ に近い値をとり続けている（いきなり大きく異なる値をとったりしない）」というものである。これを、極限の ε-N 論法と同じセンスで、次のように定義する。

定義：連続

「関数 $f(x)$ が点 x で連続である」とは、以下の手続きが、「$f(x)$ への近さの度合い（要求水準）$\varepsilon > 0$」としてどんな（小さな）数が選ばれても実行可能であることをいう。

1. 要求水準 $\varepsilon > 0$ が与えられる。
2. （ε の値を見たうえで）基準となる「幅 δ」を決める。
3. すると、x からのずれが δ 以内のどんな z（$|z - x| < \delta$ を満たす z）を見ても、要求水準を満たしている（$|f(z) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ）。

特に区間 I の中の任意の点 x で関数 $f(x)$ が連続なとき、「関数 $f(x)$ は区間 I で連続」という。

関数の極限も同様に定義される。関数の極限を用いれば、連続性は「$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$」ということだと解釈できる。

定義：関数の極限

「関数 $f(x)$ が極限 $x \to x_0$ で c に収束する（$\lim_{x\to x_0} f(x) = c$）」とは、以下の手続きが、「c への近さの度合い（要求水準）$\varepsilon > 0$」としてどんな（小さな）数が選ばれても実行可能であることをいう。

1. 要求水準 $\varepsilon > 0$ が与えられる。
2. （ε の値を見たうえで）基準となる「幅 δ」を決める。
3. すると、x_0 からのずれが δ 以内のどんな $x(\neq x_0)$（$0 < |x - x_0| < \delta$ を満たす x）を見ても[2]、要求水準を満たしている（$|f(x) - c| < \varepsilon$ が成り立つ）。

関数の極限が収束しないこと（関数が不連続であること）を示したい際には、上記の否定を示せばいい。上記の否定を示す簡便な方法として、以下のようなものがある。

> 数列 $\{a_n\}$ として、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たし、$b_n := f(x_0 + a_n)$ が $n \to \infty$ で収束しないようなものが存在するなら、$\lim_{x\to x_0} f(x)$ は存在しない。

普通の関数では、わざわざこのように連続を厳密に定義したありがたみは見えにくいので、普通でない関数で連続性を考えよう。

[3] 関数

$$f(x) := \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{10}$$

は $x = 0$ で不連続であることを示せ。

[4] ディリクレ関数が任意の点で不連続であることを示せ。

[5] トーメ（Thomae）関数

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & x \text{ が有理数で、既約分数表示して } x = \frac{p}{q} \\ 0 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases} \tag{11}$$

というものを考えよう。この関数は、任意の有理数 x で不連続、任意の無理数 x で連続であることを示せ。

与えられた関数が連続であるという性質を使いたいときにも、連続の定義が精密になされていることは重要である。

[6] 連続関数 $f(x)$ で、

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \tag{12}$$

が任意の実数 a, b に対して成り立つものを考えよう[3]。このような関数は $f(x) = kx$（ただし k は定数）しか存在しないことを示せ。
（ヒント：まず x が有理数である場合に示し、そこから連続性を用いて x が無理数の場合をカバーする）

関数の連続性そのものは有理数から有理数への関数 $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ でも定義できるが、関数の連続性から「中間値の定理」「最大値の定理」等の有用な性質を導くためには、実数とその連続性が必要となる。次章ではそれを見ることにする。

[2] x はジャスト $x = x_0$ はとらない点に注意。なお、x が x_0 より大きい場合のみ考える極限を「右極限」、逆に x が x_0 より小さい場合のみ考える極限を「左極限」という。
[3] 実はこの条件は過剰で、本当は $x = 0$ を除く一点 x で $f(x)$ が連続なら十分である。

3　実数の連続性

3.1　実数の構成

実数というものが何であるかは、多くの人は直観的には理解している。直線を引いて、それを数直線とみなし、数直線上の一点を実数とすれば、それで実数は分かった気分がする。しかし、これだと「そもそも直線とは何か」「直線の上の点とは何で、どういう性質を満たすのか」等々は結局きちんと定式化されていない。

あるいは、「実数とは有理数と無理数を合わせたものだ」というかもしれない。しかしそうすると、では無理数とは何か、という問いに答えるのが難しくなる。「無理数とは実数から有理数を除いたものだ」と言っていては循環論法になってしまう。

有理数は比較的楽に構成できる（整数を整数で割ればいい）ので、有理数だけから実数が作れればいい。世界を 01 でしか理解できないロボットの友達に、「実数とは何か」を教えないといけない状況を考えてもいいだろう。そこで、「実数とは何か」を有理数だけから構成する方法を見ていこう。

しかし実数の構成をする前に、そもそも実数は必要なのかということを考えてみよう。実数を構成するなどという面倒なことをせず、有理数だけで議論を展開すると何がマズいのだろうか。

一つの問題として、「明らかに収束しそうな数列なのに、収束先が存在しない」という事態が発生しうる。先ほどコーシー列を導入し、これは収束すると述べた。直感的にもこれは収束してほしい数列だが、実は有理数だけの世界で考えていると、コーシー列が収束しない事態が起こりうる。すなわち、「数列のどの値も有理数だが、有理数に収束しないコーシー列」が存在する。この有名な例としては

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \tag{13}$$

がある。どの x_n も有理数だが、この数列は $n \to \infty$ でネイピア数 e に収束する。ネイピア数は有理数ではないことが簡単に証明できる[4]。有理数は数直線上のどの区間にも無限に存在しているが、しかし同時に穴だらけなのである。

そこで、「すべてのコーシー列は収束する」が言えるようにするために、収束先が有理数ではなかった有理数列のコーシー列について、収束先となりうる要素をすべて「有理数の集合」に追加してしまうことにしよう[5]。ただし、異なる数列が同じ（有理数ではない）数に収束する場合には、要素を二つの列それぞれに対して二つ追加してしまったら、これは「足しすぎ」になる。このようなダブりを防ぐために、二つのコーシー列 a_n と b_n が同じ値に収束するかどうかを、二つの数列の差 $c_n := a_n - b_n$ がゼロに収束するかどうかで判定することにする（a_n, b_n が収束するなら、c_n が有理数列のコーシー列であることは簡単に示せるので、c_n は必ず何かに収束する）。同じ値に収束するコーシー列たちに対しては、数は一度しか追加しない。

このようにして実数が構成できた。

定義：実数

有理数の集合に、「有理数列コーシー列の収束先」としてありうる、有理数ではないものをすべて一度だけ追加した集合を、「実数」と呼ぶ。

有理数ではない数に関する演算や大小関係は、その値に収束するコーシー列に対する演算や大小関係として、自然に定義することが出来る。

---

[4] 【証明】:$e = \frac{p}{q}$ と書けるとして矛盾を導く。$\frac{p}{q} = \frac{p\cdot(q-1)!}{q!}$ なので、e は分母 $q!$ の有理数としても表示できる。一方、$C := \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$ と置くと、C もまた分母 $q!$ の有理数として表示でき

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = C + \frac{1}{q!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+n)} < C + \frac{1}{q!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1}\right)^n = C + \frac{1}{q!}\frac{1}{q} < C + \frac{1}{q!} \tag{14}$$

が成り立つので、$C < e < C + \frac{1}{q!}$ となる。これは e が分母 $q!$ の有理数として表せることに矛盾。

[5] 実際には、「非有理数の収束先を有理数の集合に追加した」というよりも、「有理数列のコーシー列に、その後で述べた同値類を入れた集合を実数と定義した」のだが、このように書いた方が初めての人には理解しやすいと思う。

このように実数を定義すれば、もともと言いたかった

任意のコーシー列は収束する（実数のコーシー列は、実数の収束先を持つ）

がいえる。言い換えれば「実数には一切穴があいていない」ことも示すことが出来る[6]。「デデキントの切断（Dedekind cut）」や「実数集合の上限の存在性」が実数の定式化に用いられることも多い[8] が、やりたいことは同じで「実数に穴があいていないことをいう」ためのアプローチである。（「実数の連続性」という概念と最も自然に直結する特徴づけは、デデキントの切断だろうと思う）

[7] 実数の連続性の意義を感じ取るために、逆に「有理数 $\mathbb{Q}$ 上では、連続関数は必ずしも中間値の定理を満たさない」ということを具体的に示そう。

関数 $f(x)$ で、任意の有理数 x について $f(x)$ もまた有理数であり、$f(x)$ は連続関数だが、中間値の定理を満たさない（有理数 $a<c<b$ について、$a=f(x_1)$ と $b=f(x_2)$ を満たす x_1、x_2 は存在するが、$c=f(x)$ となる有理数 $x\in[x_1,x_2]$ が存在しない）例があることを示せ。
（ヒント：例えば $f(x)=x^2$ はそのような例になっている。）

3.2 実数に占める有理数の割合

少々話が脱線するが、有理数と無理数の「多さの違い」を考えよう。そのために、まず「可算集合（countable set）／非可算集合（uncountable set）」という概念を導入しておこう。ここでは、自然数の集合は既に構成されているものとする[9]。

定義：可算集合・非可算集合

自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ からの全射が存在するような集合を「可算集合」という。可算集合でない集合を「非可算集合」という。

重要な注意として、無限集合を考えている場合には「ある集合と、その真部分集合との間に全単射を組む」ことができる[10]。例えば、「自然数の集合 $\mathbb{N}$」は「整数の集合 $\mathbb{Z}$」の真部分集合だが、写像として

$$f(n)=\begin{cases}\frac{n+1}{2} & n\text{ が奇数のとき}\\ -\frac{n}{2}+1 & n\text{ が偶数のとき}\end{cases} \tag{21}$$

を考えれば、これは $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ の全単射である。また、正方形を斜めになぞっていくことで、$\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ の全単射も組むことができる。そのため、任意の有理数 $\mathbb{Q}$ もまた $\mathbb{N}$ と全単射を組むことができ、そのため有

[6] 「構成よりもう言えてるんじゃないのか？」と思うかもしれないが、収束が言えているのは「有理数の数列」だけであり、「新たに追加された数」を使って作られた数列の収束先がこの中にあるのかは確認する必要がある。ここではそれを簡単に示しておこう。

x_n を、N 以上の n,m について

$$|x_n-x_m|<2^{-N} \tag{15}$$

が成り立つ実数上のコーシー列とする[7]。各 x_n は「有理数列のコーシー列の収束先」なので、各 n ごとに有理数の数列 $q_{j,n}$ として

$$|q_{j,n}-x_n|<2^{-j} \tag{16}$$

を満たすものが存在する。このとき有理数の数列として

$$r_n:=q_{n,n} \tag{17}$$

を考える。すると、M 以上の n,m について

$$|r_n-r_m|<3\cdot 2^{-M} \tag{18}$$

が成り立つので、これはコーシー列の有理数列である。よって

$$\lim_{n\to\infty} r_n=r \tag{19}$$

が実数の中に存在する。すると、この実数 r に対し、

$$|x_n-r|<4\cdot 2^{-n} \tag{20}$$

が示せるので、x_n は実数 r に収束する。よって、実数列 x_n は収束先を実数に持つことが分かった。

[8] 実数の連続性についてはさまざまな等価な定義がある。その間の同値関係などについて知りたい人は、例えば金子晃『数理系のための基礎と応用　微分積分 I』サイエンス社、第 5 章を見ていただきたい。

[9] 例えばフォン・ノイマンの順序数を用いれば、空集合のみから出発して自然数が構成できる。

[10] むしろこれがデデキントによる無限集合の「定義（通称「デデキント無限」）」である。

理数全体の集合もまた可算集合である（必要があれば詳細は黒板で説明する）。

一方、実数全体の集合は非可算集合である。つまり、自然数全体 $\mathbb{N}$ から実数全体 $\mathbb{R}$ への全射は存在しない。これは対角線論法（diagonal argument）で示すことができる。$f(n)$ が $\mathbb{N} \to [0,1)$ の全射として矛盾を導こう。このとき、$[0,1)$ 区間の実数を二進展開することにする。すると、例えば

$$
\begin{aligned}
f(1) =& 0.1101\cdots \\
f(2) =& 0.0111\cdots \\
f(3) =& 0.0010\cdots \\
f(4) =& 0.1100\cdots \\
& \vdots
\end{aligned}
$$

のような無限個のリストを作ることができる。このとき、$[0,1)$ の実数 a として

- 小数第一位は、$f(1)$ の小数第一位を 01 反転したもの
- 小数第二位は、$f(2)$ の小数第二位を 01 反転したもの
- 小数第三位は、$f(3)$ の小数第三位を 01 反転したもの
- 小数第四位は、$f(4)$ の小数第四位を 01 反転したもの

  $\vdots$

というものを選ぶ。上の例であれば、$a = 0.0001\cdots$ である。すると、構成より明らかに $f(n) = a$ となる自然数 n は存在しない。これは全射性に反する。

つまり、「全射が作れない」という意味で実数全体は有理数全体よりも明らかに「真に大きな集合」である[11]。実数は有理数と無理数からなるので、このことは直感的に言えば「無理数は有理数よりも圧倒的に多い」ということ、あるいは「有理数は実数のうちのほんの少しの割合しか占めていない」ということである。

ここまでの話は「有理数は実数の中にほとんど存在しない」ということであった。ところが一方、有理数は実数のいたるところに存在する、というのもまた事実である。これを議論するために、まず「稠密[12]」という概念を導入する。なお、「稠密」は一般の位相空間に対して定義されるが、ここでは簡単のため距離空間に限定する[13]。

定義：稠密

距離が $d(\cdot,\cdot)$ で与えられている距離空間 X の部分集合 A について、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in X$ に対し、$d(x,a) < \varepsilon$ を満たす $a \in A$ が存在するとき、部分集合 A が「稠密（dense)」であるという。

要するに、どの点を選んできても、そのすぐそばに A の要素があるときに、A は稠密であるということである。そして有理数は、実数の集合において稠密であることが簡単に示せる。なので、有理数は実数全体の中で「どこにでもあまねく存在する」。要素の数でいうと「スカスカ」なのに、「どこにでも存在する」というのが、実数における有理数の位置づけである。

4　級数

無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{22}$$

[11] 集合論の言葉では「二つの集合は異なる濃度である」という。
[12] 「ちゅうみつ」と読む。「ちょうみつ」ではない。
[13] 一般の位相空間 X の場合、任意の $x \in X$ について、x を含む開集合が A の元を含む場合に、A は稠密であるという。

が収束するか否か、収束するとしたらその値は何か、という問題を考える。これは、N までの部分和

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} a_n \tag{23}$$

に対し

$$S := \lim_{N\to\infty} S_N \tag{24}$$

を考えることに相当する。この極限が存在する場合、この無限級数は収束するという。無限級数の収束のためには $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は必要だが、これは十分ではない（再び $a_n = 1/n$ の場合が反例）。無限級数を考える必要性は、数学や物理の様々な局面で発生する。

a_n がすべて正の場合は、S_N を書き下して極限の問題として解けばよい[14]。以下では a_n が正負入り混じっている場合を考える。この場合、いい加減な級数の処理を行うとしばしばおかしなことが起きる。歴史的にも、数学的に正当化されない処理を行って不可解な結果が得られ、大いに混乱が生じた。代表的な例として、$\ln(1+x)$ のテイラー展開に $x=1$ を代入したもの

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \tag{25}$$

を考えよう。右辺が左辺に収束することは証明出来る[15]。ところが、ここで全体を 2 倍して適当に並べ替えると

$$\begin{aligned}
2\ln 2 =& 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) \\
=& 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \cdots \\
=& (2-1) - \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\right) - \cdots \qquad (???) \\
=& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \\
=& \ln 2
\end{aligned} \tag{27}$$

となり、$2\ln 2 = \ln 2$ というおかしな結果が得られてしまう。

数学的にまずい操作は 3 行目の変形で、項を並べ替えることは実は一般には数学的に正当化されないのである。しかし、項を並べ替えた方が計算が容易になる場合も多々あるので、どのような場合に並べ替えが正当化できるかは明らかにしておきたい。それを以下で与えよう。

定義：絶対収束と条件収束

収束する無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について、各項の絶対値をとった級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{28}$$

もまた収束するとき、この級数は「絶対収束（absolute convergence）」するという。逆に、この級数は発散するが元の無限級数は収束するとき、この級数は「条件収束（conditional convergence）」するという。

---

[14] とはいっても、極限が収束するか発散するかの判断は容易でない場合も多々ある。さまざまな収束・発散の判定法が高木貞治『解析概論』44 節に出ている。

[15] n 次で展開を打ち切った際の積分型剰余項を評価すると

$$R_n = \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{n-1}}{(1+y)^n} \leq \int_0^1 dy \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^{n-1} \tag{26}$$

であり、これは $n \to \infty$ でゼロに収束する。

定理

絶対収束する級数は、項を並べ替えても同じ値に収束する。

[8] 上の定理を証明せよ。
（ヒント：部分和 S_N がコーシー列であることを示す）

一方、条件収束する級数については、驚くべきことに、項の並べ替えをすることでどんな値にでも収束させることができる。例えば、先ほどの $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ を並べ替えることで、5 に収束する級数にもできれば、円周率 π に収束する級数にすることもできる。

定理（リーマンの再配列定理（Riemann rearrangement theorem））

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が条件収束するならば、これを並べ替えることで、任意の値を収束先に持つ無限級数を作ることができる。

[9] リーマンの再配列定理を証明せよ。
（ヒント：a_n のうち、正のみ、負のみの項を連れてくると、それぞれ単独の和はそれぞれ正負に発散する。これを利用して、任意の値について、それに収束するように正の項と負の項の順番を決められることを示す。）

絶対収束しない級数が（条件）収束するか否かの判定は一般に容易でないが、a_n が正の値と負の値を交互にとる「交代級数（alternating series）」については、簡便な収束判定法が知られている。

定理（交代級数の収束）

交代級数は、

$$|a_1| > |a_2| > |a_3| > |a_4| > \cdots \tag{29}$$

と絶対値が狭義単調減少し、$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つなら、収束する。

[10] 上の定理を証明せよ。

5 関数列と一様収束

5.1 一様収束の定義

関数の列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を考える。この関数列の収束を議論するために、まず「各点収束」という概念を導入する。

定義：各点収束（pointwise convergence）

関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束するとは、この関数の定義域の任意の x について

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{30}$$

が成り立つことをいう。

解析学の整備でも有名なコーシーは、あるとき以下の「間違った定理」を証明したと考えた。

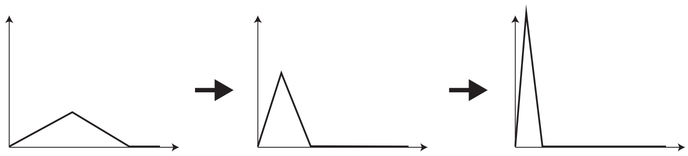

Figure 2: 式 (33) の $f_n(x)$ の、n を大きくしていく際の概形の変化。ピークが鋭くなりながら端に逃げていくので、$f_n(x)$ は $f(x) = 0$ に収束するが一様収束しない。

（定理？）: 関数 $f_n(x)$ がすべて連続関数で、$f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束するなら、$f(x)$ もまた連続関数である。

この「定理」が間違いであることは、のちにアーベルによって指摘された。ここではアーベルの反例より簡単な例を取り上げる。関数列として

$$f_n(x) = \arctan(nx) \tag{31}$$

を考えよう。これは任意の n で連続な関数である。一方、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x < 0 \end{cases} \tag{32}$$

であり、これは明らかに不連続関数である。

このようなことが起きた理由はいろいろな形で理解できるが、その一つの答えは「収束の速さが各点ごとに異なるから」だといえる。「関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束する」ということの定義を明確に書くと、以下のようになる。

1. $\varepsilon > 0$ と x を任意に決める。
2. ε と x に依存した数 $N(\varepsilon, x)$ が存在し、$n > N(\varepsilon, x)$ ならば $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ。

重要な点は「$N(\varepsilon, x)$ が x にも依存している」という点である。$\varepsilon < \pi/2$ となる ε を固定した際、x が 0 に近いほど $N(\varepsilon, x)$ は大きくなり、特に $x \to 0$ で $N(\varepsilon, x)$ は発散してしまう[16]。これが、連続な関数列の収束先が連続関数にならなかったことの背景にある。

このような問題は、極限の順序交換を考えるうえでもしばしば直面するものである。例えば、関数列

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ n^2 x & 0 < x \le \frac{1}{n} \\ -n^2 x + 2n & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} < x \end{cases} \tag{33}$$

を考える（図 2）と、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{34}$$

が任意の $0 \le x \le 1$ で成り立つ。一方、

$$\int_0^1 dx f_n(x) = 1 \tag{35}$$

[16] ただし $x = 0$ を直接代入すると、$N(\varepsilon, x)$ は任意となる

が常に成り立つため、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 dx f_n(x)\right)=1 \tag{36}$$

$$\int_0^1 dx\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)=0 \tag{37}$$

となり、極限と積分の順序交換をすると両者は一致しない。

このようにいろいろな反例が存在するため、コーシーは新たに「一様収束」という概念を導入する（ただし一様収束という概念に最初に到達したのはワイエルシュトラスらしい[17]）。

定義：一様収束（uniform convergence）

「関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束する」とは、以下が成り立つことである。

1. $\varepsilon>0$ を任意に決める。
2. ε にのみ依存した数 $N(\varepsilon)$ が存在し、$n>N(\varepsilon)$ ならば任意の x に対し $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ が成り立つ。

各点収束との差は「任意の x」という条件がどの位置に置かれているかだけだが、その差は大きな違いをもたらす。

定理

$f_n(x)$ がすべて連続関数で、関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するなら、$f(x)$ も連続関数である。

[11] 上の定理を証明せよ。

一様収束は、収束先の関数に幅が狭くなるような形で近づいていくことを主張している。「関数の形がどんどん収束先の関数に近づいていく」という意味での収束は、各点収束ではなく一様収束によって与えられる。先程の式 (33) の極限と積分の順序交換がうまくいかなかったのも、$f_n(x)$ は $n\to\infty$ 極限で $f(x)=0$ に各点収束はするが一様収束はしていなかったからである。

通常、各点収束と一様収束との間は一般的な形では結びつきはない。しかし、稀有な例外として以下の定理が知られている。

ディニ（Dini）の定理

閉区間 $[a,b]$ 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ が、この区間上で連続であり、かつ n について単調減少（$f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$ が任意の x、n で成立）とする。また、$f_n(x)$ は連続関数 $f(x)$ に各点収束するとする。このとき、$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束している。

[12] ディニの定理を示せ。
（ヒント：背理法を用いて、$f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束しないと仮定して矛盾を導く。一様収束しないとすると、ある $a>0$ が存在し、各 n について $f_n(c_n)-f(c_n)>a$ となる点 c_n が存在する。ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理より、$\{c_n\}$ は収束する部分列を持つ。それを c として、点 c において $f_n(x)$ が $f(x)$ に各点収束しないことを示す。）

[17] 岡本久、長岡亮介『関数とは何か』近代科学社、p92

なお、ディニの定理は「閉区間」を「開区間」に変えると容易に反例が構成できる。例えば開区間 $(0,1)$ 上で

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases} \tag{38}$$

は $f(x) = 0$ に各点収束するが一様収束しない。実際、証明では集積点が内部に含まれるという事実が用いられているため、閉区間という条件は外すことができない。

やや本筋からは外れるが、おまけとして「任意の連続関数は多項式で近似できる」という定理を紹介しておこう[18]。証明は省略する[19] が、ベルンシュタイン多項式を用いた証明が有名である。

ワイエルシュトラスの近似定理（Weierstrass approximation theorem）

$f(x)$ を閉区間上の連続関数とする。任意の $\varepsilon > 0$ について、x の多項式 $p(x)$ が存在し、任意の x について

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon \tag{39}$$

とできる。
収束の言葉でいえば、多項式の列 $\{p_n(x)\}$ が存在し、$p_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する。

5.2 一様収束の応用

前の章では、積分と極限が順序交換しない例を見た。別の例として、極限と微分の順序交換がうまくいかない例も見ておこう。フーリエ変換により、$-\pi < x < \pi$ において

$$x = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots \tag{40}$$

が得られるが、これを x で微分すると

$$1 = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots \qquad (???) \tag{41}$$

というおかしな式が得られてしまう。

最後に、パラメータ微分と積分の順序交換がおかしな結果を導く例も見ておこう。$a > 0$ に対し

$$\int_0^\infty dx \frac{\sin ax}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{42}$$

という関係式が証明出来る[20]。しかし、これを a でパラメータ微分すると

$$\int_0^\infty dx \cos ax = 0 \qquad (???) \tag{43}$$

という数学的に正しくない式が得られてしまう。このように、極限操作や微分・積分は、無思慮にその順番を変えると数学的に正しくない結論が導かれることがしばしばなのである。

しかし、極限の順序交換で計算が大幅に楽になる場合も多い。そこで、交換ができることが証明されている場合をいくつか見ておこう。

[18] なおこの定理は複素関数には拡張できない（多項式列は必ず正則関数に収束するので、正則でない連続関数は近似できない）。
[19] 例えば岡本久、長岡亮介『関数とは何か』近代科学社、p200 202
[20] まず $a = 1$ の場合に証明し、その後変数変換 $x \to ax$ で値が変わらないことを示す。$a = 1$ の場合の証明は、後の **[13]** の練習問題で与える。

定理

- $f_n(x)$ がすべてリーマン可積分で、関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するなら、$f(x)$ もリーマン可積分であり、さらに積分と極限の順序交換ができる。つまり
$$\int_b^a dx f(x) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b dx f_n(x) \tag{44}$$
が成り立つ。
- $f_n(x)$ がすべて微分可能で、$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立ち（これは各点収束でいい）、$\frac{d}{dx}f_n(x)$ が一様収束するなら
$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x) \tag{45}$$
が成り立つ。

最初の例で、パラメータ λ を持つ関数 $g(x,\lambda)$ を用いて $f_n(x) = \frac{g(x,\lambda+\Delta\lambda_n)-g(x,\lambda)}{\Delta\lambda_n}$（ただし $\lim_{n\to\infty}\Delta\lambda_n = 0$）と置けば、これはパラメータ微分と積分の順序交換
$$\int_b^a dx \frac{\partial}{\partial\lambda}g(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\int_b^a dx g(x,\lambda) \tag{46}$$
と解釈できる。

広義積分の場合には、一様収束はさらに厄介になる。例えば、例として以下のような $[0,\infty)$ 上の関数を考えてみよう。
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x < n \\ \frac{1}{n} & n \le x \le 2n \\ 0 & x > 2n \end{cases} \tag{47}$$
この関数は、各点で $f(x) = 0$（すべての点で 0 をとる定数関数）に収束する。さらに、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ε にのみ依存した数 $N(\varepsilon)$ が存在し、$n > N(\varepsilon)$ ならば任意の x に対し $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ。なので、一見すると一様収束しているような気がするが、任意の n で $\int_0^\infty dx f_n(x) = 1$ なので
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty dx f_n(x) = 1 \tag{48}$$
$$\int_0^\infty dx f(x) = 0 \tag{49}$$
となり、積分値は同じ値に収束しない。

この原因は、積分の値を与える「こぶ」が、n を大きくすると薄くなりながら $x\to\infty$ の遠くに逃げていってしまったためである。このような事態を避けるために、広義積分 $\int_a^\infty dx f_n(x)$ の一様収束には、さらに条件を追加する。

定義：広義積分の一様収束

- 広義積分 $\int_a^\infty dx f_n(x)$ が一様収束するとは、通常の一様収束の定義に加えて以下の性質を満たすことである。

  1. $\varepsilon > 0$ を任意に定める。
  2. n によらない数 $R(\varepsilon)$ が存在し、

$$\left| \int_{R(\varepsilon)}^\infty dx f_n(x) \right| < \varepsilon \tag{50}$$

  が任意の n で成り立つ。

- 広義積分 $\int_a^\infty dx f(x,y)$ が $F(y)$ に一様収束するとは、$F(y;t) := \int_a^t dx f(x,y)$ が $t \to \infty$ で $F(y)$ に一様収束することをいう。

[13] 以下の積分の順序交換

$$\int_0^\infty da \int_0^\infty dx e^{-ax} \sin x = \int_0^\infty dx \int_0^\infty da e^{-ax} \sin x \tag{51}$$

が正当であることを示し、これを実行することで

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2} \tag{52}$$

を示せ。
（注：単純な広義積分の一様収束として考えると、$a \to 0$ では被積分関数が一様収束しないので、$a = 0$ 近傍のみさらに別個の処理が必要である）

5.3 ギブズ現象

ここまでに出てきた「一様収束しない関数の例」がことごとく「見ればわかるような反例」だったので、厳密な証明のためには一様収束性の確認は必要としても、実用上は「見て明らかにまずいことが起きてない」ならば、一様収束と各点収束の違いなど気にしなくていいのではないかと思うかもしれない。しかし、各点収束するが一様収束しない関数列における現象で、実用上（数値計算など）も重要なものはいろいろ存在する。ここではその例として「ギブズ現象」を見てみよう。

ギブズ現象は、不連続関数のフーリエ変換において一般的にみられる現象である。分かりやすい例として、矩形波

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x = 2n\pi \\ \frac{\pi}{4} & 2n\pi < x < (2n+1)\pi \\ 0 & x = (2n+1)\pi \\ -\frac{\pi}{4} & (2n+1)\pi < x < (2n+2)\pi \end{cases} \tag{53}$$

に対するフーリエ級数展開を考えよう（ただし n は整数)。すると、簡単な計算で

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots \tag{54}$$

と書けることが分かる。また、部分和

$$f_n(x) := \sum_{j=0}^n \frac{1}{2j+1} \sin(2j+1)x \tag{55}$$

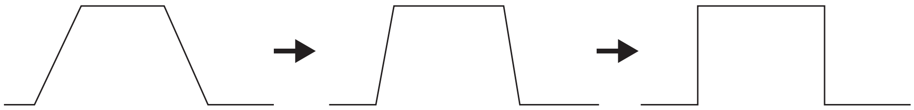

Figure 3: 矩形波のフーリエ変換の収束の仕方に対するナイーブな見方。台形の傾きがだんだん急になっていって矩形波に収束するだろうと考える人も多いだろうが、実は端の振る舞いはもっと複雑である。

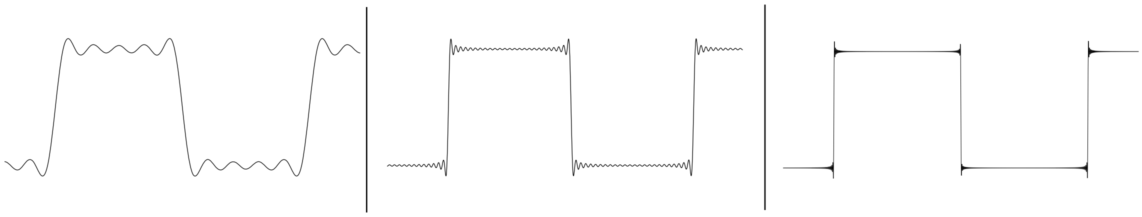

Figure 4: 左から順に、式 (55) の $n=5$、$n=25$、$n=125$ のプロット。矩形波の端の出っ張りが、n を大きくしても消えないことが分かる。画像は Wikipedia「ギブズ現象」より引用。

を定義すると、任意の x について

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{56}$$

と各点収束することも証明できる。

一方、$f_n(x)$ は $f(x)$ には一様収束しない。一様収束しないこと自体は、フーリエ級数展開の右辺が x の連続関数である一方、$f(x)$ が不連続関数であることを考えれば、自然な帰結ではある。しかし、多くの人は、図 3 のように「台形のような波形が、ただどんどん傾きが急になる形で矩形波に収束していく」と思うのではないだろうか。ところが、実は正側の $x=0$ 近傍において、$\frac{\pi}{4}$ より真に「大きな」値をとり続ける点が存在し続けることが示せる。具体的には

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\cdot 0.089490\cdots \tag{57}$$

となることが証明出来る。ただし $0.089490\cdots$ は

$$= 0.089490\cdots = \int_0^{\pi} dx \frac{\sin x}{x} - \frac{\pi}{2} \tag{58}$$

によって定まる値である。要するに、反対側への（約 2 割ほどの）オーバーシュートが起きているのである。図 4 を見るとわかるように、$x=0$ 近傍では出っ張りが発生しており、これは n をどれだけ大きくしても消えない。これは不連続点のフーリエ変換で一般的にみられる現象で、「ギブズ現象（Gibbs phenomenon）」と呼ばれている。フーリエ変換を含む数値計算をする際には、注意しておく必要のある現象であろう。（なお、有限の出っ張りがあるにもかかわらず各点収束するのは、出っ張りの位置が n が大きくなるにつれてどんどん $x=0$ 近傍に寄っていくからである。このあたりの振る舞いは式 (33) で見た例にも似ている）

なお証明は難しくなく、$g(x) := \frac{\sin x}{x}$ と置くと

$$f_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j+1}\sin\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) = \frac{1}{2n+2}\sum_{j=1}^{n}\frac{2n+2}{2j+1}\sin\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) = \frac{\pi}{2n+2}\sum_{j=1}^{n} g\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) \tag{59}$$

なので、$n\to\infty$ 極限で和を積分に置き換えて、右辺が $\frac{1}{2}\int_0^{\pi} dx \frac{\sin x}{x}$ に収束することから示せる。

6 微分可能性

関数 $f(x)$ が点 x_0 で「微分可能（differentiable）」であるとは、極限

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \tag{60}$$

が存在することをいう。極限値が存在するとき、それを x_0 での $f(x)$ の「導関数（derivative)」という。逆に、この極限が存在しないとき、関数 $f(x)$ が点 x_0 で微分不可能であるという。

以下のクイズを考えてみよう[21]。

問：次の下線に入るものとして正しいのは次のどちらか。

任意の__________な関数はほとんどいたるところ[22]微分可能である。

A：連続
B：単調増大

明らかに微分可能な関数は連続関数である。逆は分からないが、しかし適当に思い浮かぶ連続関数は、可算個の例外点を除けば全域で微分できるものばかりであろう。一方、単調増大というのは「ただひたすら増えていく」というだけの性質なので、微分とはあまり関係がある気がしない。そうすると、上のクイズの答えは A のような気がするかもしれない。実際、アンペールは以下の定理（？）を残している。

（定理？）: 連続関数は可算個の点を除いて微分可能である。

ところが、以下の二つの定理が証明されている。

定理（ワイエルシュトラス：1872）

連続だがいたるところ微分不可能（continuous everywhere but differentiable nowhere）な関数が存在する。

定理（ルベーグ、ヤング[23]）

任意の単調増大な関数は、ほとんどいたるところ微分可能である。

後者の証明には測度論の知識が必要なので、興味のある人は実解析の教科書[24] などを読んでいただきたい。しかしそれよりも大分弱い以下の定理でも、「単調増大」がいかに厳しい条件を課しているかは把握できると思う。

定理

任意の単調増大な関数は、ほとんどいたるところ（加算個の例外点を除いて）連続である。

こちらの定理の証明は難しくなく、単調増大な関数 $f(x)$ について、$y = f(x)$ の不連続点における「y 側のとびの区間」は必ず有理数を一つ含むので、有理数の部分集合（要素は加算個）から不連続点への全射が構成できることから直ちに従う。

さて、具体的な「連続だがいたるところ微分不可能な関数」の構成に入る前に、まずこのような関数がそう簡単には構成できないことを確認しておこう。「連続だけどギザギザしていればいいんだろう」と思ってもっとも安直に考え付くのは、三角波関数（一番近い整数への距離を与えるものだと思ってもよい）

$$s(x) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - x| \tag{61}$$

[21] 本章の以下の流れや歴史的経緯については、岡本久・長岡亮介『関数とは何か』近代科学社、第 8 章に大きく依拠している。

[22] 「ほとんどいたるところ（almost everywhere)」のきちんとした定義は測度論をやる必要があるので、詳細は後で述べることにして、ここでは省略する。大雑把にいえば「長さがゼロの領域を除くと」ということである。例えば可算個の例外点は除外してかまわない。

[23] ルベーグが関数の連続性を仮定して証明を与え、ヤングが一般的な証明を与えた。

[24] この結果は、例えば E. スタイン、R. シャカルチ『プリンストン解析学講義　実解析』第 3 章で「有界変動関数がほとんどいたるところ微分可能」のコロラリーとして与えられている。

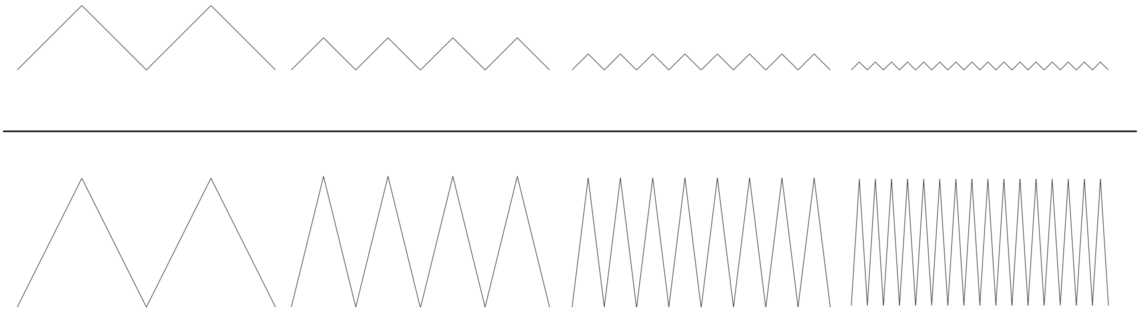

Figure 5: 上：$f_n(x) := \frac{1}{n}s(nx)$ の例。$n \to \infty$ で直線に収束する。下：$g_n(x) := s(nx)$ の例。どちらも「連続だがいたるところ微分不可能な関数」ではない。

を用いて

$$f_n(x) := \frac{1}{n}s(nx) \tag{62}$$

と定義して、$n \to \infty$ をとるというものであろう（図 5 上）。しかし、

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \tag{63}$$

なので、この極限の収束先の関数は $f(x) = 0$ という「連続でいたるところ微分可能」な関数になってしまう。

そうすると、「三角波がどんどん小さくなってしまったのがいけなかったんだ」と思って、

$$g_n(x) := s(nx) \tag{64}$$

と定義して、$n \to \infty$ をとるのはどうか、と思うかもしれない（図 5 下）。しかし、今度は n を大きくすると 0 と 1 の間をいくらでも素早く往復するようになるので、この関数列は各点でさえ収束しない（もちろん連続関数にはならない）。

もっとひねった例でさえ、なかなか構成はうまくいかない。シュワルツ[25] は 1873 年に、床関数 $\lfloor x \rfloor$（x を超えない最大の整数）を用いて、以下の「連続だがいたるところ微分不可能な関数（？）」を構成した。

（定理？）：$f(x) := \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$ とするとき、

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(2^n x)}{4^n} \tag{65}$$

は連続だがいたるところ微分不可能な関数である。

しかし実のところ、関数 $S(x)$ は単調増大関数なので、ルベーグ及びヤングの結果により、この関数は「連続でありかつほとんどいたるところ微分可能な関数」なのである[26]。

では、連続だがいたるところ微分不可能な関数の構成が難しいことを納得してもらったところで、いよいよその具体的構成を見ることにしよう。歴史的に最初の「連続だがいたるところ微分不可能な関数」の具体例はワイエルシュトラス関数である（図 6）。ワイエルシュトラス関数は

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x) \tag{66}$$

で定義される。この関数は $0 < b < 1$ かつ $ab \geq 1$ のとき、連続だがいたるところ微分不可能な関数になる[27]。

[25] ヘルマン・シュワルツ（Herman Schwarz）。コーシー・シュワルツの不等式などで有名である。

[26] 詳細な解析によると、この関数 $S(x)$ は、自然数 k, n を用いて $x = k/2^n$ の形で書ける点では微分不可能、それ以外の点では微分可能である。

[27] ワイエルシュトラスは、a が奇整数かつ $ab > 1 + 3\pi/2$ という、上記よりも強い制限の下で証明を与えた。より一般的な証明はハーディー（Hardy）による。

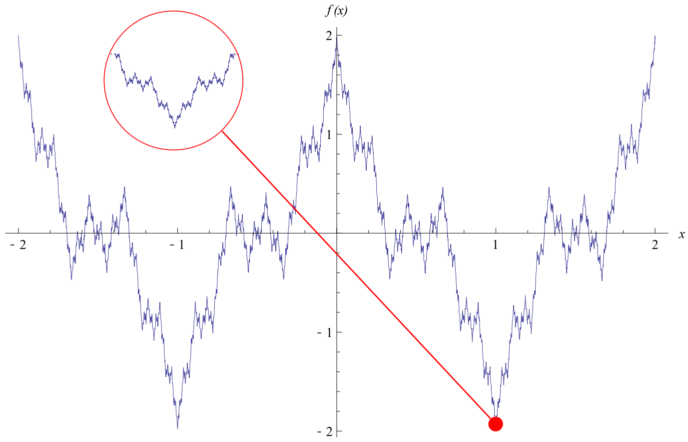

Figure 6: ワイエルシュトラス関数の概形。画像は Wikipedia「ワイエルシュトラス関数」より引用。

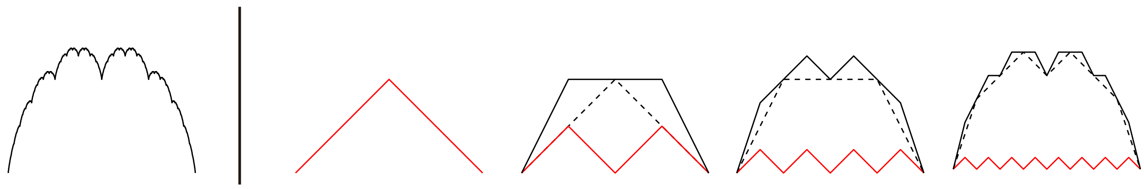

Figure 7: 左：高木関数の最終形の概形。右：三角波を積み上げて高木関数を作っていく途中過程。画像は Wikipedia「高木曲線」より引用。

しかし、この関数がいたるところ微分不可能であることの証明はいささか大変である[28]。そこで、より簡単に微分不可能性が証明できる関数として、高木貞治が 1903 年に提案した高木関数を見ることにしよう。高木関数は $x \in [0,1]$ 上で

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n} \tag{67}$$

と定義される。図 7 のように三角波が積みあがっていくような関数である。

[14] 高木関数 $T(x)$ の級数表示が一様収束し、収束先が連続関数であることを示せ。

[15] 高木関数 $T(x)$ がいたるところ微分不可能な関数であることを示そう。

(1) 任意の $0 < t < 1$ と各 m に対し、整数 k_m が存在し

$$\frac{k_m}{2^m} \leq t < \frac{k_m + 1}{2^m} \tag{68}$$

とできる。

$$u_m := \frac{k_m}{2^m} \tag{69}$$

$$v_m := \frac{k_m + 1}{2^m} \tag{70}$$

と定義しよう。このとき、$\lim_{m\to\infty} u_m = t$、$\lim_{m\to\infty} v_m = t$ より、もし $T(x)$ が $x = t$ で微分可能ならば

$$\lim_{m\to\infty} \frac{T(v_m) - T(u_m)}{v_m - u_m} \tag{71}$$

が存在し、$T(x)$ の導関数に収束することを示せ。

[28] 証明を知りたい人は、例えば E. スタイン、R. シャカルチ『プリンストン解析学講義　フーリエ解析入門』4.3 節などを見ていただきたい。

(2) 極限

$$\lim_{m\to\infty}\frac{T(v_m)-T(u_m)}{v_m-u_m} \tag{72}$$

は存在しないことを示せ。
（ヒント：m が一つ増えるごとに、± 1 の項が一つずつ足されていくことに注意する。）

7　積分可能性

7.1　区分求積法からリーマン積分へ

高校では、積分は「微分の逆演算」として定式化されていた[29]。つまり、関数 $f(x)$ の積分 $\int dxf(x)$ は、「$dF(x)/dx=f(x)$ を満たす原始関数 $F(x)$ を見つけよ」という問題に言い換えられていた。しかし、極めて簡単な関数であっても、原始関数が初等関数で書けないことが知られている例はたくさんある。例えば以下の不定積分

$$\int dxe^{-x^2}, \qquad \int dx\frac{\sin x}{x} \qquad \int \frac{dx}{\ln x} \tag{73}$$

は初等関数で書けないことが証明されている[30]。以上のような理由から、積分を「微分の逆関数」で定義するのは不都合が多く、積分は「関数が与える図形の面積」として定義されている。

では「面積で積分を定義する」というのは、具体的にはどのような定義になるのだろうか。面積に対する最も素朴な考え方は、区間を細かく区切って長方形で近似するというものであろう（図 8）。まず真っ先に思い浮かぶのは、同じ幅の長方形に細かく分割する方法である。これはコーシーによって提案された「区分求積法」であり、

$$\int_a^b dxf(x) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(a+n\varDelta_N) \tag{74}$$

によって「定義」する。ただし $\varDelta_N := \frac{b-a}{N}$ である。

この定義は、後述するように連続関数に対しては非常にうまくいく。一方で、不連続関数にまで積分を拡張しようとすると、不合理な結論も生じる。式 (9) で定義されたディリクレ関数（以下に再掲）

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x\text{ が有理数のとき} \\ 0 & x\text{ が無理数のとき}\end{cases}$$

の積分を考えよう。まず $0\le x\le 1$ の区間での積分を考えると、区分求積法だと

$$\int_0^1 dxf(x) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\right)=1 \tag{75}$$

である。なぜなら、$\frac{n}{N}$ は常に有理数であり、有理数 x に対して $f(x)=1$ が成り立つからである。

ここで、積分範囲を $0\le x\le\sqrt{2}$ にまで広げることを考える。非負関数の積分範囲を拡張したのだから、積分の値は増加する、すなわち

$$\int_0^1 dxf(x) \le \int_0^{\sqrt{2}} dxf(x) \tag{76}$$

が成り立つべきである。ところが、再び区分求積法だと

$$\int_0^{\sqrt{2}} dxf(x) := \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{n}{N}\sqrt{2}\right)=0 \tag{77}$$

となってしまう。なぜなら、$\frac{n}{N}\sqrt{2}$ は常に無理数だからである。このような不合理な事態が生じるため、区分求積法は「任意の関数」の積分の定義としては不適切である。

---

[29] なお、本章の内容は筧三郎「積分の見方」(『数理科学』2018 年 5 月号）に大きく依拠している。

[30] 不定積分が初等関数で書けるか否かは、リウヴィル（Liouville）判定法によって判定できることが知られている（1835)。これを有限解の手続きで終わるようにしたリッシュ（Risch）のアルゴリズムというものも存在する（1968)。このあたりの詳細は、金子晃『数理系のための基礎と応用　微分積分 II』（サイエンス社）第 8 章補遺を参照していただきたい。

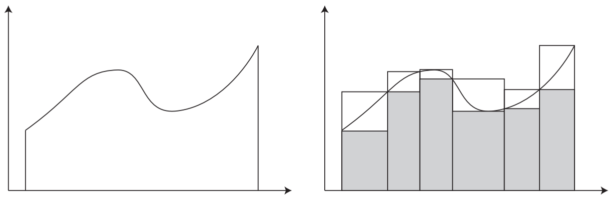

Figure 8: 積分を上下の長方形で評価する例。

リーマンの時代における重要な数学の問題として、「フーリエ級数展開はどのような関数に対して正しいといえるのか」という問題があった。フーリエ係数は積分を用いて与えられるため、この問題にこたえるには、連続関数を超えた様々な「一般的な関数」に対して適用できる積分の定義が必要である。リーマン積分は、そのような文脈においてリーマンが導入したものであった[31]。

区間を細かく区切った長方形による近似として、特に長方形の取り方として、「どの部分でも関数の上にあるような長方形」と「どの部分でも関数の下にあるような長方形」の二つを考えれば、

$$\text{下の長方形の面積} \leq \text{実際の図形の面積} \leq \text{上の長方形の面積} \tag{78}$$

という関係が成り立つ。なので、関数 $f(x)$ によって囲まれた部分の面積の上下からの評価が与えられることになる[32]。

特に、長方形の最大幅をどんどん細かくしていく状況を考えた際に、幅がゼロになる極限で

$$\text{下の長方形の面積} = \text{上の長方形の面積} \tag{79}$$

が成り立ったとすれば、関数 $f(x)$ によって囲まれた部分の面積もまたこの値に一致するはずである。(79) が成り立つとき、この関数を「リーマン可積分（Riemann-integrable）」であるといい、このような形で定義された積分を「リーマン積分（Riemann integral）」という。一方、幅をゼロにする極限をとっても

$$\text{下の長方形の面積} \neq \text{上の長方形の面積} \tag{80}$$

だった場合、この関数は「リーマン可積分ではない」と呼ばれる[33]。関数によっては「積分できない」ということになってしまうが、積分がうまく定義できないものに対しては明確に「積分できない」と結論付けられる点は、どんな関数に対しても何らかの値は出てくるがその値の信頼性が分からない区分求積法と比べると、厳密化が進んだといえよう。

連続関数、及び不連続点が稠密でないような関数はリーマン可積分であることが知られている。特に、連続関数の場合にはリーマン積分による定義と区分求積法とが一致することが示せる。なので、連続関数を対象にする限りは、わざわざリーマン積分のような難しい概念を持ち出さなくても特に問題は起きない。

7.2 リーマン可積分・非可積分な例

まずは具体例を見ていこう。区分求積法で解ける例ではリーマン積分を定義したありがたみがないので、ここでは区分求積法では取り扱えないような例を取り上げる。

[16] ディリクレ関数はリーマン非可積分であることを示せ。

[31] リーマンの教授資格論文の候補「三角級数による関数の表現可能性に関して」の第二部で展開された。結局、教授資格論文は有名な幾何学の議論の方が用いられ、これは後に出版された。

[32] ここからの定式化はダルブー（Darboux）によるもので、リーマンのオリジナルはこれとは異なる。リーマン積分は「点付き分割」を用いて定義されており、ここで書いたのは「ダルブー積分」というものである。ただしダルブー積分とリーマン積分の等価性が証明されているため、ここではダルブー積分を用いた定義を「リーマン積分の定義」とした。

[33] ここで注意深い人は、幅をゼロにしていったとしても、区切り幅の取り方に依存して上（や下）の長方形の面積が複数の値に収束してしまうことがないのか、疑問に思うかもしれない。結果から言うと、リーマン可積分か否かを問わず、任意の有界関数について、上や下の長方形の面積は、区切り幅の取り方によらずに幅をゼロにする極限で一意に収束することが知られている（ダルブーの定理、1875）ため、どのような区切り方を用いても問題ない。

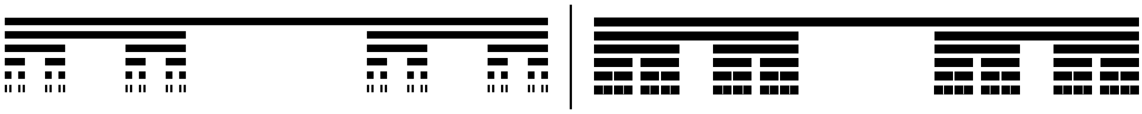

Figure 9: 左：カントール集合の第五段階まで。右：スミス・ヴォルテラ・カントール集合の第五段階まで。画像は Wikipedia「Cantor set」、Wikipedia「Smith—Volterra—Cantor set」より引用、一部修正。

[17] 式 (11) のトーメ関数（以下に再掲）

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q} & x\text{ が有理数で、既約分数表示して } x = \frac{p}{q} \\ 0 & x\text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

についての積分

$$\int_0^1 dx f(x) \tag{81}$$

はリーマンの意味で定義可能であり、積分値はゼロとなることを示せ。

カントール集合（Cantor set）というものを考えよう。これは、$[0,1]$ 区間上の集合で、以下のように定義される。第ゼロ段階の集合 C_0 は、$[0,1]$ 区間全体の集合である。ここで区間を三等分し、真ん中の長さ $1/3$ の開区間を抜いたものを第一段階の集合 C_1 とする。なので、第一段階では $C_1 := [0,1/3] \cup [2/3,1]$ という集合である。この二区間をそれぞれ三等分し、真ん中の長さ $1/3^2$ の開区間を抜いたものを第二段階の集合とする。なので、$C_2 := [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ である。第 n 段階では、長さ $1/3^n$ の区間が 2^{n-1} 個取り除かれる。これを無限に繰り返し、最後まで残った集合をカントール集合 C と定義する（図 9 左）。

[18] カントール集合の指示関数

$$\chi_C(x) := \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases} \tag{82}$$

に対し、積分

$$\int_0^1 dx \chi_C(x) \tag{83}$$

はリーマンの意味で定義可能であり、積分値はゼロであることを示せ。

カントール集合は一見スカスカだが、実は $[0,1]$ 区間の実数全体と一対一写像を作れる点には注意しておこう。これは、カントール集合に属する数は「小数点以下を三進法で展開した際に、0 と 2 しか出現しない数」だが、$2 \to 1$ と置き換えればこれは $[0,1]$ 区間の実数全体の二進小数展開と一致する。そして不連続点の「数」もまた同様の考察により実数と同じだけある。不連続点の「数」でいえば、圧倒的に有理数全体の集合の指示関数（ディリクレ関数）よりも不連続点が多いにもかかわらず、ディリクレ関数はリーマン可積分ではないが、カントール集合の指示関数はリーマン可積分なのである。

長さは一段階ごとに $2/3$ 倍されており、$\lim_{n\to\infty}(2/3)^n = 0$ である。なので、カントール集合の指示関数の積分値がゼロなのは自然な帰結である。しかし、こういう素朴な長さの概念がリーマン積分ではうまく取り扱えなくなる場合がある。カントール集合とよく似た、スミス・ヴォルテラ・カントール集合（Smith-Volterra-Cantor set）を考えよう[34]。これは n 段階目に長さ $1/3^n$ の区間ではなく長さ $1/4^n$ の区間を真ん中から取り除いて作られる集合である（図 9 右）。第一段階では $S_1 := [0,3/8] \cup [5/8,1]$、第二段階では $S_2 := [0,5/32] \cup [7/32,3/8] \cup [5/8,25/32] \cup [27/32,1]$ である。最後まで残った部分の集合をスミス・ヴォルテラ・カントール集合 S という。

各段階ごとに取り除かれる部分の長さが $2^{n-1} \cdot 1/4^n$ なので、取り除かれた総長は

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \tag{84}$$

[34] 「太ったカントール集合（fat Cantor set）」、「ハルナック集合（Harnack set）」などとも呼ばれる。

である。なので、スミス・ヴォルテラ・カントール集合として残った区間の長さも素朴に考えると 1/2 となるはずである。ところが、これはリーマン積分ではうまく特徴づけることができない。

[19] スミス・ヴォルテラ・カントール集合 S の指示関数

$$\chi_S(x) := \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases} \tag{85}$$

を考えよう。

(1) この関数には、連続点が稠密にあることを示せ。

(2) この関数に対する積分

$$\int_0^1 dx \chi_S(x) \tag{86}$$

はリーマン可積分ではないことを示せ。

このような積分までうまく扱うためには、測度論とルベーグ積分を導入する必要がある。

7.3 リーマン可積分性の一般論

具体例を多数見たので、次に一般的にリーマン可積分性が言える場合を見ておこう。その前に準備として、ゼロ集合（測度ゼロ）を定義する。

定義：ゼロ集合とほとんどいたるところ

実数の部分集合 S がゼロ集合である（ルベーグ測度ゼロである）とは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、以下の性質を満たす開区間の無限列 $\{I_n\}$ が存在することである。

- 開区間の列全体は S を被覆する。すなわち $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_n$
- 開区間の列全体の長さは ε 未満である。$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$

逆に、測度ゼロの点を除いた実数の集合である性質が成り立つとき、その性質は「ほとんどいたるところ（almost everywhere）」で成り立つという。

特に、可算個の点集合はゼロ集合である[35]。

ではリーマン可積分性の必要十分条件を与えよう。

定理（リーマン可積分性の必要十分条件）

関数 $f(x)$ がリーマン可積分である必要十分条件は、$f(x)$ がほとんどいたるところ連続である（不連続点の集合のルベーグ測度がゼロである＝ゼロ集合である）ことである。

あるいは等価だが、関数 $f(x)$ がリーマン可積分である必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、「$f(x)$ が ε 以上不連続である点」の集合のジョルダン外測度がゼロであることである。

さらにあるいは等価だが、関数 $f(x)$ がリーマン可積分である必要十分条件は、任意の $\varepsilon > 0$ と $\eta > 0$ に対し、適切な積分区間の分割 $\{\Delta_i\}$ が存在し、「$f(x)$ の最大値と最小値の差が ε 以上の区間 Δ_i」の長さの総和が η 未満にできることである。

[35] 可算個の点に対しては、自然数 i でラベル出来る。与えられた ε に対し、i 番目の点を長さ $\varepsilon/2^{i+1}$ の開区間で覆えば、可算個の点はすべて覆われ、この開区間の長さの合計は $\varepsilon/2$ である。

重要な注意だが、これは「連続点が稠密ならリーマン可積分である」ということではない。実際、スミス・ヴォルテラ・カントール集合の指示関数 $\chi_S(x)$ は稠密な連続点を持つが、これはすでに見たようにリーマン可積分ではない。ここまでに見た三つの性質

- 非可算無限個の点を持つ
- 稠密
- ほとんどいたるところ

はすべて異なる性質である点には注意を促しておこう。リーマン可積分か否かに効いてくるのは、この最後の性質「ほとんどいたるところ」である。

極限と積分可能性の関係を考えよう。一様収束のところですでに見たように、連続関数の列が一様収束するなら、収束先の関数も可積分であり、かつ極限と積分の順序交換ができる。上の条件の「連続関数」は「リーマン可積分な関数」に置きなおせる。

この「一様収束」を「各点収束」に変えると反例が生じる。つまり、リーマン可積分な列 $f_n(x)$ で、$f(x)$ に各点収束し、$f(x)$ がリーマン可積分でないものが存在する。分かりやすい反例は、スミス・ヴォルテラ・カントール集合の第 n 段階までの集合の指示関数 $\chi_{S_n}(x)$ であろう。任意の n でこれはリーマン可積分だが、$n \to \infty$ でこれはスミス・ヴォルテラ・カントール集合の指示関数に各点収束し、リーマン可積分ではなくなる。

一様収束性はかなり強い条件であるため、このままだと適用条件が厳しく見えるかもしれない。しかし、実は収束先がリーマン可積分であるならば、あとは関数の有界性さえ仮定できれば、一様収束を各点収束にまで緩めることができる。

アルツェラの有界収束定理（Arzela's bounded convergence theorem）

関数列 $\{f_n(x)\}$ のどの $f_n(x)$ もリーマン可積分であり、$f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束し、$f(x)$ もリーマン可積分とする。このとき、n と x によらない定数 M があり $|f_n(x)| < M$ が成り立つなら、

$$\lim_{n\to\infty} \int_b^a dx f_n(x) = \int_b^a dx f(x) \tag{87}$$

証明はテクニカルに難しいので省略する[36]。関数の有界性が必要なのは、式 (33) のような状況を避けるためである。

「各点収束で可積分性が示せるルベーグ積分と比べ、リーマン積分は収束について弱い」と言われることも多い（特にルベーグ積分の教科書でそのようにしてルベーグ積分の導入がされることが多い）が、アルツェラの有界収束定理を用いればリーマン積分でもかなりのところまでできる。ルベーグ積分が導入された歴史的経緯は、収束性の問題よりも、先述したスミス・ヴォルテラ・カントール集合のような素朴な（ジョルダン）測度のような方法では長さが求められない様々な集合に対して、測度の定義を拡張していく過程で生まれたという方が正しい[37]。ただしもちろん、ヒルベルト空間論などの解析学の進展を踏まえるならば、収束に関する性質（特に数学の一般論としての展開）はルベーグの方が扱いやすいことは間違いない。

7.4 微分積分学の基本定理の破れ

特に連続な関数 $f(x)$、及び連続的微分可能な関数 $g(x)$ に対しては、微分と積分が互いに逆操作であることを主張する以下の関係式

$$\frac{d}{dx}\int dx f(x) = f(x) \tag{88}$$

$$\int_b^a dx g'(x) = g(a) - g(b) \tag{89}$$

[36] 証明を知りたい人は、小平邦彦『解析入門』岩波書店、5.4 節の b などを見ていただきたい。
[37] 歴史的な話は藤田博司『「集合と位相」をなぜ学ぶのか』技術評論社などを見ていただきたい。

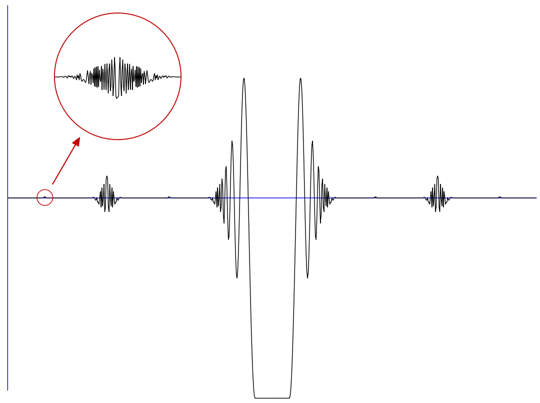

Figure 10: 「いたるところ微分可能」「導関数は有界」であるにもかかわらず「リーマン可積分でない」ような「ヴォルテラ関数」の構成過程の、最初の 3 ステップ後の状況。画像は Wikipedia「Volterra's function」より引用。

が成り立つことが証明できる。これらを「微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus)」という。この定理は、「長方形の面積」というリーマン積分の定義と、「微分の逆」という高校までの（扱いやすい）積分の定義とが一致していることを示している。

ただし $g(x)$ に対する条件を「連続的微分可能」から「微分可能」に緩めてしまうと、微分積分学の基本定理が成り立たない例が知られている。ヴォルテラ（Volterra）は 1881 年に、「いたるところ微分可能」「導関数は有界」だが「導関数はリーマン可積分でない」という性質を持つ、極めて病的な（pathological）関数である「ヴォルテラ関数」という関数を構成した（図 10)。基本となるアイデアは、

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{90}$$

という、$x = 0$ で導関数が振動するような関数を利用することである。ただしこの関数の導関数そのものはリーマン可積分なので、これをうまく組み込むことで反例を作る。

[20] 式 (90) の導関数 $f'(x)$ は、$x = 0$ を含む有限区間でリーマン可積分であることを示せ。

区間 $[0, 1/(2 \cdot 4^n)]$ 上で、式 (90) の導関数 $f'(x)$ がゼロとなる最大の x を a_n とする。これを用いて、区間 $[0, 1/4^n]$ 上で関数 $g_n(x)$ を以下のように定義する。

$$g_n(x) := \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq a_n \\ f(a_n) & a_n < x < \frac{1}{4^n} - a_n \\ f(\frac{1}{4^n} - x) & \frac{1}{4^n} - a_n \leq x \leq \frac{1}{4^n} \end{cases} \tag{91}$$

要するに、真ん中で微分できない点ができないように、区間 $[0, 1/4^n]$ 内に式 (90) とそれをひっくり返したものをつないだような関数である。これをスミス・ヴォルテラ・カントール集合の補集合（取り除かれた部分）に順にはめ込んでいくことで作られるのがヴォルテラ関数である。

[21] ヴォルテラ関数の導関数が、区間 $[0, 1]$ でリーマン可積分ではないことを示せ。