

答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1]、[2]（[1]5 点、[2] は (1)2 点、(2)3 点）

裏：[3]、[4]（各 5 点）

[1] $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ と実数 k に対し、 $\cos kA$ を求めよ。

[2] A, B を $n \times n$ の正定値エルミート行列とする。以下の命題について、正しいならば証明し、正しくないならば反例を一つ挙げ、それが確かに反例であることを示せ。ただし正定値の定義は、講義中に示した等価な定義のどれを出発点にしても構わない。

(1) $A + B$ は正定値である。

(2) AB のすべての固有値は正の実数である。

[3] 行列の関数 $f(X) = -X^{-1}$ は、 $X > 0$ の領域で作用素単調関数か。正しいなら証明し、正しくないならば反例を一つ挙げ、それが確かに反例であることを示せ。ただし $A \leq B$ のとき任意の Y について $Y^\dagger AY \leq Y^\dagger BY$ であることは事実として証明なしに用いてよい。

[4] 対角化可能な $n \times n$ 行列 A の特異値を $\{s_i\}_{i=1}^n$ 、固有値を $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ とする（特異値及び固有値が縮重している場合は、その分だけ特異値及び固有値は重複して同じ値をとるようにしている）。このとき

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。ただし特異値の定義は、講義中に示した等価な定義のどれを出発点にしても構わない。