答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1]、[2]（各 5 点）

裏：[3]、[4]（各 5 点）

[1] ベクトルの p-ノルム $|\boldsymbol{x}|_p := (\sum_i |x_i|^p)^{1/p}$（$p \geq 1$。ただし $p = \infty$ については $|\boldsymbol{x}|_\infty := \lim_{p\to\infty} |\boldsymbol{x}|_p = \max_i |x_i|$）が誘導する行列の誘導ノルム $\|A\|_p^{\rm ind} := \max_{|\boldsymbol{x}|_p=1} |A\boldsymbol{x}|_p$ を考える。$p \leq q$ のとき、$\|A\|_p^{\rm ind}$ と $\|A\|_q^{\rm ind}$ の間には一般的な大小関係（$\|A\|_p^{\rm ind} \leq \|A\|_q^{\rm ind}$ または $\|A\|_p^{\rm ind} \geq \|A\|_q^{\rm ind}$）が成り立つか。成り立つならば、どちらの不等式が成り立つのかを明示したうえでそれを証明せよ。どちらの不等式も成り立たないならば反例を構成し、それが確かに反例であることを示せ。

[2] A, B を二つの n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の凸な部分集合とする。このとき、A, B を用いて作られる集合 $C := \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y} \in A, \boldsymbol{z} \in B\}$ を定義する。この集合 C は凸集合だと言えるか。言えるならば証明し、言えないならば反例を上げ、それが確かに反例であることを示せ。

[3] 実行列 A と実ベクトル $\boldsymbol{b}$ に対し、ある非負の n 次元実ベクトル $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ が存在し、$A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ が成り立つとする。このとき、m 次元 [非負（書き忘れにより補足）] 実ベクトル $\boldsymbol{y}$ で、$\boldsymbol{y}^\top A \geq \boldsymbol{0}^\top$ かつ $\boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{b} < 0$ を満たすものは存在しないことを証明せよ。

[4] すべての成分が正の実数をとる n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ がある。両者の間には majorization の関係 $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$（あるいは等価な特徴づけである、二重確率行列 T が存在し $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ と書けること）が成り立つとする。このとき、$\sum_i \ln x_i$ と $\sum_i \ln y_i$ の間には一般的な大小関係（$\sum_i \ln x_i \leq \sum_i \ln y_i$ または $\sum_i \ln x_i \geq \sum_i \ln y_i$）が成り立つか。成り立つならば、どちらの不等式が成り立つのかを明示したうえでそれを証明せよ。どちらの不等式も成り立たないならば反例を構成し、それが確かに反例であることを示せ。