

答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1]、[2]（各 5 点）

裏：[3](1), (2)（各 5 点）

[1] 以下の積分を求めよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-3x^2+4xy-6y^2+9x-4y} \quad (1)$$

[2] 以下の積分を、 N が大きい領域でラプラス近似を用いて近似し、 $aN^b e^{cN}$ の形 (a, b, c は数) で求めよ。ただし近似精度（誤差の補正項）については議論しなくてよい。

$$\int_0^{\infty} dx \cdot x^{-(3Nx^2)} \sin x \quad (2)$$

[3] 箱と 2 枚のチップがある。最初の時点では、2 枚のチップは箱の中に入っている。ここから、以下の操作を N ステップ行う。

操作：1～6 の目が均等に $1/6$ ずつ出るサイコロを振る。

- 手元のチップが 0 枚の場合：目が 4,5,6 ならば、チップを箱から 1 枚取り出して手元に置く。目が 1,2,3 ならば何もしない。
- 手元のチップが 1 枚の場合：目が 5,6 ならば、チップを箱から 1 枚取り出して手元に置く。目が 1 ならば手元のチップ 1 枚を箱に戻す。目が 2,3,4 ならば何もしない。
- 手元のチップが 2 枚の場合：目が 1,2 ならば手元のチップを 1 枚箱に戻す。目が 3 ならば手元のチップを 2 枚とも箱に戻す。目が 4, 5, 6 ならば何もしない。

(1) n ステップ目に手元のチップが i 枚 ($i = 0, 1, 2$) である確率を p_i とし、確率ベクトルを $\mathbf{p}^n := \begin{pmatrix} p_0^n \\ p_1^n \\ p_2^n \end{pmatrix}$ と書く。 \mathbf{p}^n

と \mathbf{p}^{n+1} の間の関係式を具体的に書き下せ。

また、 $n \rightarrow \infty$ 極限をとった際の確率分布 \mathbf{p}^n の収束先を求めよ。

(2) この操作を N ステップ行う。このうち、操作終了時にチップが手元に一枚もないステップの回数を M_0 とする。無限ステップ ($N \rightarrow \infty$) 極限において、 M_0 のスケールされたキュムラント母関数を求めよ。