

答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1]、[2]（各 5 点）

裏：[3](1), (2)（各 5 点）

[1] 下に凸な関数 $f(x)$ に対するルジャンドル変換を $g(a) := \sup_x [ax - f(x)]$ で定義する。

この定義を出発点に、関数 $f(x) = \frac{1}{x} + x$ ($0 < x < \infty$) をルジャンドル変換せよ。ただしルジャンドル変換して得られた関数の定義域も明示すること。

[2] A を $n-1$ 次元単位超球面 S^{n-1} 上の半超球面（半径 1 の半球の超球面への一般化）とする。また、 A からのユークリッド距離が $\varepsilon (> 0)$ 以下である領域を A_ε とする。このとき、以下が成り立つことを示せ。ただし $P[A_\varepsilon]$ は超球面 S^{n-1} 上に占める A_ε の割合である。

$$1 - P[A_\varepsilon] \leq \frac{1}{2} e^{-\varepsilon^2(n-1)/2} \quad (1)$$

[3] 以下、非負確率変数 X に対するマルコフの不等式

$$P[X \geq s] \leq \frac{\langle X \rangle}{s} \quad (2)$$

は既知として証明なしに用いてよいが、他の関係式は証明してから用いること。

(1) X は非負確率変数であり、その 3 次モーメントは $\langle X^3 \rangle = k$ である。 $P[X \geq s]$ ($s > \sqrt[3]{k}$) を k を用いて評価する不等式を導け。また、与えられた s, k に対し、この不等式の等号を達成する確率変数 X の例を一つ挙げよ。

(2) X は非負の整数値をとる確率変数とする。このとき、以下が成り立つことを示せ。ただし Var は分散である。

$$P[X = 0] \leq \frac{\text{Var}[X]}{\langle X \rangle^2} \quad (3)$$