

答案の作成方法について

各問題の解答は、解答用紙の以下の個所に記入すること（カッコ内は配点）

表：[1] (5 点)、[2](1) (2 点)、(2) (3 点)

裏：[3] ((1)(3)3 点、(2)4 点)

[1] 区間 $[0, 2]$ 上の実関数の空間を考える。重み付き内積 $\langle f, g \rangle = \int_0^2 dx f(x)g(x)x^2$ の下での、最高次係数が 1 の直交多項式系 $\{P_n(x)\}$ を考える。 $P_2(x)$ を求めよ。

[2] 以下の問いに答えよ。

(1) 以下のデルタ関数の積分を計算せよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x^3 - x) f(x) \quad (1)$$

(2) $x_i \in \{\pm 1\}$ ($i = 1, 2, 3$) とする。 $g(x_1, x_2, x_3)$ として、多数決関数 $\text{maj}(x_1, x_2, x_3)$ (x_1, x_2, x_3 のうち、3 個または 2 個が +1 ならば +1 を、1 個または 0 個が +1 ならば -1 をとる関数) とする。ブール関数 g のフーリエ変換を求めよ。

[3] $[0, \infty)$ 上の古典的直交多項式系

$$P_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \quad (2)$$

を考える。

以下導出過程もきちんと示すこと。答えのみの場合は得点対象とならない場合がある。

(1) この古典的直交多項式系が満たす二階線形微分方程式を求めよ。

(2) この古典的直交多項式系の母関数 $G(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) y^n / n!$ を求めよ。

(3) P_n, P_{n-1}, P_{n-2} が満たす 3 項間漸化式を求めよ。