

力学：講義ノート

白石直人

1 はじめに

1.1 講義全体の流れ

この講義の前半では、質点の運動方程式 (1.2) を出発点にして様々な力学の結果を導く。運動方程式 (1.2) からは運動量保存則などの一般的な法則が導出できる。また個別具体的な設定においては、運動方程式 (1.2) が与える微分方程式を解くことで、質点の運動を定量的ないし定性的に導出できる。

講義後半では、多数の質点が集まって出来た有限の大きさの物体の運動を考察する。この場合にも質点の運動方程式 (1.2) を出発点にすることもできるが、より一般的な方法であるラグランジアンを用いた手法の方が便利なので、これを導入する。具体的な設定としては、独楽（コマ）などの剛体の回転運動を中心に扱う。

時間があれば、可積分性やカオスなどの話題にも触れたい。

1.2 古典力学の構造と運動方程式

古典力学 (classical mechanics)¹ では、投げたボールから回転するコマまで、力を受けた物体の運動を取り扱う。力学は我々の身近な現象の物理的記述の最も基本的なものであり、またおおよそすべての物体の運動（バクテリアの運動から工作機械まで）の記述に用いられるものであるため、応用においても非常に重要である。また、そうした応用上の重要性のみならず、力学を通じて物理学的なものの方の見方の重要な部分にも触れることができる（これについては本章の最後でもう一度触れる）。

力学の一番簡単な問題設定として、質量²を持つが大きさのない点の運動がよく取り扱われる。このような点を「質点 (point mass)」と呼ぶ。もちろん現実世界には大きさのない物体など存在しないが、以下の理由により質点記述は有効かつ有用な道具である。第一に、例えば投げたボールの運動を記述したい場合、ボールを「その重心にボールの全質量が集まった質点」とみなして計算しても、おおよそ運動はよく記述できるという点が挙げられる。そのため、質点による記述は運動のよい近似的記述としてよく用いられる。第二に、堅い物体から連続変形する水などに至るまで、あらゆる大きさのあるものを「無数の質点の集まり」とみなして記述することができる³。このことを踏まえると、質点の運動こそが力学の記述の基礎となるものだといえる。

3次元空間中の一つの質点の座標を、直交座標系を用いて $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で表す。この講義では、太文字はベクトルを表すものと約束する⁴。力学では、慣習的に上付きのドットで時間微分を表す。例えば

$$\dot{\mathbf{r}} := \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}} := \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

となる。位置 \mathbf{r} の一階微分は速度であり、慣習的に \mathbf{v} と書く。

力学の出発点となるのは、以下の物理法則（公理）である。質量 m の質点の位置 \mathbf{r} の時間発展 (time evolution) は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

¹「古典」とついているのは、量子力学 (quantum mechanics) との区別のためである。ただしこの講義ノートでは以降、混乱がない場合にはただ「力学」とだけ書いて古典力学を指すものとする。

²後述する連続体の記述が行われる場合には、質量ではなく質量密度 (単位体積当たりの質量) を持つ点として扱われる。この場合には一点の質量はゼロであり、その代わり無数の点 (すべて合わせると質量は有限) があるという状況設定となる。

³大きさを無視して運動を議論することは古くから行われていたが、この点を強調して質点記述の普遍性を最初に指摘したのはレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) である (山本義隆『古典力学の形成』日本評論社)。

⁴板書においては、 \mathbf{x} のように二本線でベクトルを表す。

で与えられる。ただし \mathbf{F} はこの質点に働く力であり、力 \mathbf{F} の具体的な形は問題設定ごとに異なる。この式を質点の「運動方程式 (equation of motion)」という⁵。以降の結果は、すべてこの運動方程式を出発点として導き出すことが出来るものである。

運動方程式の特殊な場合として、力が一切働かない状況がある。この場合には $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ なので、速度変化が一切ない、すなわち

$$\mathbf{v} = \text{const} \quad (1.3)$$

という状況が成り立つ。ただし「const」は定数 (constant) を表す。これは、静止しているものは静止し続け、運動しているものはその速度で運動し続けるという「慣性の法則 (law of inertia)」である⁶。

1.3 力の性質

力学の具体的設定においては、「各物体に働く力を見抜く」ことは重要である。ただしこの講義では、複雑な力の関係を見抜く問題はあまり取り扱わない⁷ ので、ここではこの問題には深入りしない。苦手な人は高校物理の教科書などで復習しておいてもらいたい。

[1-1] 図 1 のように、太さの無視できる棒を壁に立てかける。ただし棒と床の間には摩擦が働くが、壁と棒の間には摩擦は働かないものとする。

棒の長さを L 、棒の質量を m 、棒と床の接点から棒の重心までの距離を l 、棒と床の間の角度を θ 、床の最大静止摩擦係数を μ 、重力加速度を g とする。棒に働く力と、その大きさが満たすべき関係式を導け (解くべき方程式を立てるまででよく、力の大きさを具体的に求める必要はない)。

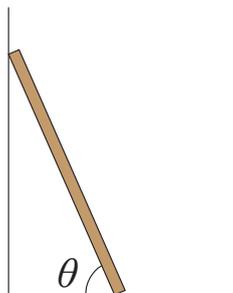


図 1: 棒を立てかけた状況

力についての重要な性質に「作用・反作用の法則 (law of action and reaction)」がある。これは、二つの質点 ij 間に力が働く際、「質点 i が質点 j に及ぼす力」と「質点 j が質点 i に及ぼす力」は、大きさは同じで向きは反対になる、という法則である。式で書くと、質点 i が質点 j に及ぼす力を \mathbf{F}_{ij} と書くことにすると、

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (1.4)$$

ということである。

さらにほとんどすべての場合には、質点 i と質点 j の間に働く力の向きは、二つの質点を結んだ直線の向きに一致する。式で書くと

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} // (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (1.5)$$

⁵多くの教科書では、この式は「ニュートンの運動方程式」と呼ばれている。しかし歴史的に見れば、この運動方程式を最初に書き下したのはオイラーである。運動法則に類するものはニュートン以前にもガリレオやデカルト、ホイヘンスなどが与えており、ニュートン自身の運動法則も混乱を残したものであった (例えば脚注 6 にも示すように、ニュートンは慣性力を力と考えていた節がある)。そして同時代から 19 世紀後半に至るまでは、ニュートンの功績を褒めたたえる本においてさえ、ニュートンのもつばら万有引力の法則の発見者としてのみ評価されており、力学法則の創始はオイラーを最終到達点とする多様な人物の功績として認識されていた (山本義隆『古典力学の形成』日本評論社、有賀暢迪『力学の誕生』名古屋大学出版会)。そのためここでは、ニュートンの名は冠せず、ただ「運動方程式」と呼ぶことにする。

⁶ニュートンの『プリンキピア (正式には Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica : 自然哲学の数学的諸原理)』に沿った説明をする教科書だと、慣性の法則を「運動の第一法則」、運動方程式 (1.2) を「運動の第二法則」と書いていることもある。そしてその場合、「第一法則は第二法則に包含されるのでは？」という疑問に答えるため、力学の第一法則は「慣性系が少なくとも一つこの宇宙に存在すること」を述べているのだと説明されることが多い。

力学の体系の導入の仕方としてはともかく、ニュートンの叙述についての理解としてはこれは恐らく妥当でない説明である。ニュートンは、慣性力もまた力的一种だと (現在の視点からすれば誤って) 理解していた側面があり、第一法則は「慣性力 (内部力) による運動」、第二法則は「外部力による運動」を述べたものであると考えられている (山本義隆『古典力学の形成』日本評論社)。そのため、現代的な力学理解の下では、第一法則をどう位置付けるかという問題は、力学理解の上では特に考える必要のない問題である。

⁷講義後半では、ラグランジアンを用いることで、力を見抜く必要なく物体の運動を解く系統的方法も紹介する。

ということである。この性質は、二つの質点間の力は図 2 左のようなものであり、図 2 中央のような力は生じないということを主張している。本講義ではこれを「強い作用・反作用の法則」と呼ぶことにする⁸。位置のみに依存する力（ポテンシャル力）の場合には、知られている範囲では強い作用・反作用の法則は満たされている⁹ ので、以降は強い作用・反作用の法則が成り立つものとして議論を進める。

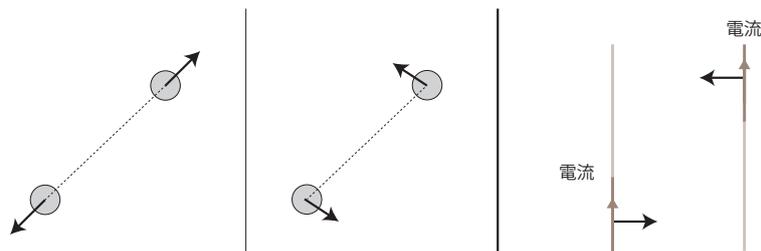


図 2: 左: 強い作用・反作用の法則を満たす例 (左) と、作用・反作用の法則は満たすが、強い作用・反作用の法則は満たさない例 (右)。右: ビオ・サバル則の場合、一見すると強い作用・反作用の法則が破れるように見える。

1.4 物理学的な見方の一例としての力学

力学は物理学的な見方の一つのプロトタイプでもある。本講義では、力学という個別の領域を学ぶと同時に、そうした視点も少しずつ見ていきたい。

質点の導入でも少し述べたが、物理においては「近似的な見方」、あるいはより正確にいうと「主要な要素だけを取り出して考える方法」は非常に重要である。そもそもほとんどの物理の記述は「有効記述 (effective description)」であり、物理的な振る舞いのうち最も重要な要素だけに絞り込み、残りの些末な要素を捨てることで得られるものである¹⁰。例えばボールの運動を解析する際の「ただし空気抵抗はないものとする」という但し書きは、今関心のあるボールの運動を記述する上で、空気抵抗は無視できるような小さな効果しか及ぼさないということを宣言するものである。この仮定が妥当な仮定なのかは、状況設定ごとに検証する必要がある。もし水中で投げたボールの運動を考えているのであれば、水の抵抗を無視するのはよい近似ではないであろう。

これと関連して、有効記述はあくまでも特定の範囲においてのみ有効な記述であることも注意する必要がある。再びボールの例を考えるなら、投げたボールの速さが普通の人間の腕で投げられる速さの範囲であれば空気抵抗を無視してもいいかもしれないが、音速を超えるような速さでボールを発射する実験ならば無視できないかもしれない。この場合、空気抵抗の無視は「速度があまり速くない領域」においてのみ正当化される。もしある運動方程式を解いた結果、速度が無限に速くなるという解が得られたとしたら、それは実際に速度がいくらでも速くなるということではなく、「その運動方程式で無視していた要素が、速度が大きくなると無視できなくなる (もはやその運動方程式で運動が記述されなくなる)」と考えるべきである。

有効記述が正当なのかは、我々の関心のある着目領域において、その有効記述で落としてしまった効果が無視できるほど小さいのか、に依存する。ここで「小さい」というのは、あくまでも比較によってのみ議論できるという点に注意する必要がある。特に (キログラムとかメートルとかの) 単位の付く量は、数字の大きさのみを見てその絶対的な大小を議論しても意味がない。例えば「100kg」という重さは、100 という数字を見ると大きく見えるし、例えば我々人間の体重程度の重さの物体の議論をしているのならば 100kg は全く無視できない重さである。一方、もし議論しているのが惑星の運動であれば、100kg の違いはほとんど無視していいだろう。そもそも 100 という数字は単位に kg を用いたから出現したものであり、t (トン) であれば同じ重さは 0.1t という (見た目には) 小さな数字になる。単位を伴う量の大小を議論するには、今の対象系における「同じ単位を持つ典型的な大きさ」で割って「無次元量 (dimensionless quantity)」にし

⁸これは特に一般的な呼び方ではない。

⁹一方、速度にも依存するような電磁気力の場合には、この法則が成り立たない (ように見える) 例も知られている。運動する電子は電流であり、それは磁場を作る。電流が複数ある場合には、電流間に力が働く。その力はビオ・サバル則 (Biot-Savart law) によって計算できるが、もし二つの電流が図 2 右のように「互いに平行な向きだが真横ではない位置」にある場合、この電流間に働く力は電流の向きに垂直であり、これは強い作用・反作用の法則を破るように見える。(ただしこれは、実際には電磁場を介した相互作用で、電磁場に対する影響まで考えれば、実は強い作用・反作用の法則は成り立っている。一見強い作用・反作用の法則が破れたのは、電磁場を無視したからである)

¹⁰ただし素粒子物理・高エネルギー物理で探求されている基礎法則は、有効記述ではなく真に普遍的な関係を明らかにしようとしている。しかしその素粒子物理・高エネルギー物理にしても、見つかった法則は「より高エネルギー領域でも成り立つ法則の、低エネルギー領域でのみ成り立つ有効理論」である、という入れ子構造は極めて広範に見ることができる。

て議論をする必要がある。100kg が大きいのか小さいのかは、100kg が「今我々が着目する現象における典型的な質量」と比べて大きいのか小さいかで判断される、ということである。空気抵抗の場合も、「空気抵抗の大きさ」と「それ以外に加わる力の大きさ」や「典型的な速度」などとの比較で、それが無視できるか否かが決まる。

何らかの項が「小さいが完全には無視できない」という状況を考えよう。こうした状況を系統的に取り扱う近似手法として、「摂動論 (perturbation theory)」は物理学で極めてよく用いられる方法である。例えば、運動方程式が

$$(\text{解くことの出来る主要項}) + \varepsilon \cdot (\text{余計な摂動項})$$

という形をしているとしよう。ただし ε は非常に小さい数で、そのため第二項全体も主要項と比べて小さな項となっているとする。このとき、方程式はおおよそ「主要項のみの場合」と同じ形なので、第ゼロ近似 = 余計な摂動項が全く存在しない場合としては、主要項のみで解いた場合の解がそのまま近似解となる。ここから、 ε は小さいが有限であるとして、この寄与を低次から順に逐次的に取り入れることで近似していく。すなわち、解の形として

$$(\text{主要項のみの場合の解}) + \varepsilon \cdot (\text{一次の摂動項の補正}) + \varepsilon^2 \cdot (\text{二次の摂動項の補正}) + \dots$$

という形を、欲しい精度まで逐次的に導くということである。これを摂動論という。現実的な状況設定において物理の問題が解けることはほとんどないので、「解ける (理想的な) 問題設定」+「摂動」の形で摂動論を用いて解析するのは、物理学のスタンダードな手法である。

無次元量の話が出たので、最後に関連して「次元解析 (dimensional analysis)」という考え方を紹介しておこう。「長さ」「重さ」「時間」など、量の単位の組み合わせを定めるものを「次元 (dimension)」という¹¹。例えば力は「(質量) × (長さ) / (時間)²」という次元を持つ。少し前に述べたように、大小関係は同じ次元の量同士でないと比較できない (あるいは無次元化する必要がある)。

$A = B$ という形の物理の関係式が成り立つには、左辺と右辺が同一の次元の量でないといけない (長さ = 時間、という関係式はありえない)。このことに着目すると、考察対象の系 (あるいは運動方程式) の持つ量の次元に着目することで、方程式を一切解くことなく、どういう形の関係式しかありえないのかを導ける場合がある。これは「次元解析 (dimensional analysis)」という技法である。例えば、単振動

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.6}$$

の周期を求めたいとしよう (解析的な導出は後の章で行う)。質量 m は (質量)、ばね定数 k は (質量) / (時間)²、周期 T は (時間) の次元を持つ。 m と k で (時間) の次元を持つ量を作るには $\sqrt{\frac{m}{k}}$ の形しかありえない。よって、周期は $T = C \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$ の形になるしかないと、方程式を一切解くことなく導ける。ただし C は無次元の係数で、これがいくつかわを知るには具体的に方程式を解く必要がある。しかし定数係数を除けば、次元の考察だけで完全に答えが定まるとするのは非常に便利である。

1.5 <補論> : 運動法則はいかなる意味で非自明な法則なのか

ここで、「力 \mathbf{F} の詳細を何も述べていない式 (1.2) の形では、運動の形が何も指定されておらず、これを (物理現象の観察に基づいて経験的に得られるはずの) 物理法則と呼ぶのは変ではないか」と思う人もいるかもしれない。確かに力 \mathbf{F} を定めていない段階では、運動の詳細はほとんど分からない。しかし、運動方程式 (1.2) は、以下のような重要な観察事実を述べている。

- 「現在の位置 \mathbf{r} 」の情報のみでは、未来の運動を決定するには不十分である (現在の位置は同一だが、未来の運動は異なるような状態の組が存在する)
- 「現在の位置 \mathbf{r} 及び速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ 」の情報だけで、未来の運動は完全に決定される (現在の加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ のような情報は不要だということ)。

前者は、「同一の位置にあるが異なる速度を持つ質点は、その後の運動も異なる」ということを述べている。後者を理解するために、図 3 のような、二通りのレールに沿って動く質点 A と B を考えることにする。このレールに沿って運動した結果、レールがなくなる場所で質点 A と B はともに「同じ位置 \mathbf{r} 、同じ速度 \mathbf{v} 」だが、異なる加速度 $\mathbf{a} := \ddot{\mathbf{r}}$ (これまでの速度変化の仕方) を持っているとしよう。このとき、以下の二通りの可能性がある。

¹¹ 「平面は二次元だが立体は三次元である」などというときの次元とは意味が異なるので注意。

1. 質点 A と B は、これまでの速度変化の仕方が異なるので、現在の加速度（速度変化の惰性）にしたがって、レールがなくなった後は異なる運動をする（未来の運動が現在の加速度にも依存する場合）
2. 質点 A と B は、現在の位置と速度が同じなので、レールがなくなった後は同じ運動をする（未来の運動が現在の加速度に依存しない場合）

我々のいる世界では、2 が正しい（未来の運動は現在の加速度に依存しない）ということを運動方程式 (1.2) は示している。「位置と位置の一階微分のみで未来は完全に決定され、二階微分以上は影響を及ぼさない」ということは、アприオリには知りえず¹²、物理現象の観察によってはじめて確立される立派な物理法則である。

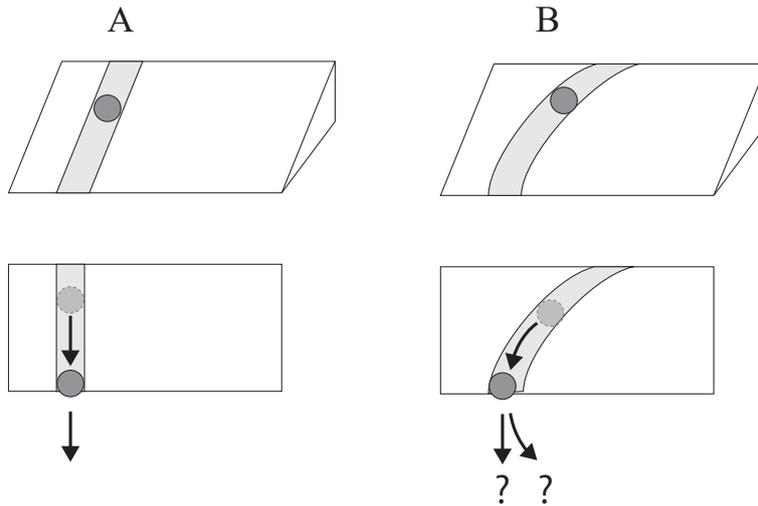


図 3: まっすぐ滑り降りた質点 A と曲がりながら滑り降りた質点 B（上図は斜め上から、下図は真上から見たもの）。もし加速度がその後の運動に影響を及ぼすのなら、A と B の運動は異なるものになる。一方、もし速度まででその後の運動が全て決定されるのなら、A と B は同じ運動を示すはずである。

¹² 「アприオリ (a priori) な性質」というのは、定義に対する論理操作や数学的な変形のみで導かれる性質、つまり「この世界がどんな世界であっても必ず成立してしまう性質であり、この世界がどのような世界なのかを調べる必要なく示してしまう性質」のことである。本文で述べたように、「この世界が、位置とその一階微分のみで未来が全て決定される世界であること」は全く必然ではない（例えば、この世界が「位置とその一階微分及び二階微分の三つ組で未来が全て決定される世界」である可能性は、世界を観察すること抜きには排除されない）ので、運動方程式はアприオリな性質ではない。

2 保存則

この章では、力学において幅広く成り立つ様々な「保存則 (conservation law)」を導く¹³。保存則は、何らかの量が時間が経っても変化せず一定であることを示す関係式である。保存則があると、時間が経った後にどういった状態にしかねないのか、が厳しく制限されるので、運動方程式を解かずとも将来の運動の様子について様々な情報を得ることができる。ただし保存則が成り立つには一定の適用条件があるので、どういときに保存則が成り立つか、あるいは成り立たないか、をきちんと理解することも併せて重要である。

この章で示す保存則は、結果のみは高校の物理の授業でも習っていると思うので、ここではその導出過程、数学的な記述方法、及び適用条件に絞って簡潔に議論することにする。詳細な説明や具体例を知りたい人は高校の教科書などで復習してもらいたい。

2.1 運動量保存則

質量にその物体の速度をかけたものを「運動量 (momentum)」と呼び、 $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$ と表す。力を受けた質点の運動量の変化は、運動方程式 (1.2) を時間積分することで得られる。式 (1.2) を時刻 $t = 0$ から $t = \tau$ まで積分すると

$$\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}(0) = \int_0^\tau m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int_0^\tau \mathbf{F}(t) dt \quad (2.1)$$

となる。最右辺は、力を時間で積分したもので、これは「力積 (impulse)」と呼ばれる。この式は、質量が大きければ大きいほど、同じだけ速度を変化させるのにはより大きな力が必要であるということを示している (そこそこなスピードのサッカーボールなら足で止められても、同じ速度の車が足に衝突したら大事故である)。

複数の質点の運動を考えよう。質点に働く力は、外部から働く力 (外力) \mathbf{F}^{ext} と、質点同士の間働く力 \mathbf{F}^{in} の和

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} \quad (2.2)$$

と分解できる。ここでは特に、外力がゼロである状況を考えよう (例えば二つの物体が衝突して速度を変える状況はこれに当たる)。このとき、 i 番目の質点の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} \quad (2.3)$$

と書ける。ここで、この式を全ての質点 i について和をとると

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_{j,i(j\neq i)} \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{j,i(j\neq i)} (\mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} + \mathbf{F}_{ij}^{\text{in}}) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

が得られる。ここで、最後の等号では作用・反作用の法則 $\mathbf{F}_{ij}^{\text{in}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{in}}$ を用いた¹⁴。よって、外部から力が働かない場合、全運動量 $\sum_i \mathbf{p}_i$ は時間変化せず一定値をとる。これを「運動量保存則 (law of momentum conservation)」という。

運動量保存則は成分ごとに成り立つので、三次元空間中であれば式 (2.4) は三種類の異なる保存則が成り立つことを主張している。また、成分ごとに成り立つ関係式であるため、例えば「 y 方向には外力は働いているが、 x 方向には外力は働いていない」という状況の場合、 x 方向の運動量保存則は相変わらず成り立つ。

2.2 エネルギー保存則

次にエネルギー保存則を導出する。3次元のエネルギー保存則を導出しようと思うと、偏微分、線積分、ナブラなどの見慣れない数学の記号や概念 (これらはベクトル解析で習う) を用いる必要がある。この講義テキストでは一般性を満たすためにこれらの概念を用いているが、理解しづらいと感じたら1次元の場合で考えてみてほしい。そうすれば、これらの新しい概念は不要になり、ただの微分や積分だけで議論を済ませることができる。

¹³ 「保存【則】」と、「法則 (観察に基づいて得られた物理の体系の公理)」であるような書き方をしているが、この講義の立場では、保存則は運動方程式 (1.2) から導出される「定理」である。

¹⁴ 運動量保存則の導出においては、強い作用反作用の法則は必要ない。

質量 m 、速度 \mathbf{v} の質点の「運動エネルギー (kinetic energy)」を $K = \frac{1}{2}mv^2$ で定義する。ただし $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ は速度ベクトルの大きさ (速さ) である。まず簡単のため、力 \mathbf{F} が位置 \mathbf{r} にのみ依存し、時刻 t には依存しないとする。このとき運動エネルギーの時間変化は、運動方程式 (1.2) に速度をかけて積分することで

$$K(\tau) - K(0) = \int_0^\tau m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^\tau \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^\tau \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.5)$$

が得られる。ただし \cdot は内積を表している。一つ目の等式では $\frac{d}{dt} K = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$ を用いた。また最後の等式では \mathbf{F} が時間への依存性を持たないことを用いた。

最後の積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は「線積分 (line integral)」と呼ばれる積分である。ただし C は質点の通過した軌道を与える曲線である。線積分は以下のように定義される。曲線 C を微小な N 区間に分割し¹⁵、その n 番目の点を \mathbf{r}_n とする。曲線 C を、隣り合う点を結ぶような折れ線で近似する (図 4)。 n 個目の折れ線は $\Delta \mathbf{r}_n := \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$ で与えられる。このとき、線積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta \mathbf{r}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N F_x(\mathbf{r}_n) \Delta x_n + F_y(\mathbf{r}_n) \Delta y_n + F_z(\mathbf{r}_n) \Delta z_n \quad (2.6)$$

と定義する。上の折れ線による定義からも見て取れるように、線積分は、ベクトル \mathbf{F} のうち特に曲線の向きに沿った成分のみを取り出して、その大きさを積分したものである。あるいは、 $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ なので、線積分は xyz 方向それぞれについて F_x, F_y, F_z を (経路に沿って) 積分し、最後に足したもの、と見てもよい。

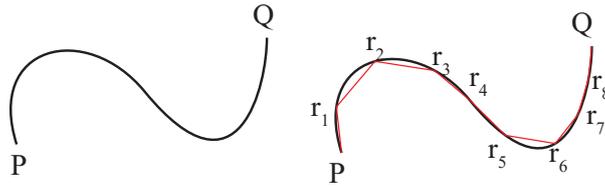


図 4: 線積分をとる際、曲線を細かい折れ線で近似する考え方。

式 (2.5) の最右辺は、加えられた力に沿ってどれだけ質点が移動したかを表す量であり、これを質点がされた「仕事 (work)」と呼ぶ。力が位置 \mathbf{r} にのみ依存するならば¹⁶、これは経路 C にのみ依存し、質点が経路 C をどのような速さで通過したかには依存しない量となる。

特に力 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ がポテンシャル $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$ を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla U := - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

と表されているとする。ただし $\frac{\partial}{\partial x}$ は x による「偏微分 (partial differential)」であり、これは他の変数を定数とみなして行う微分である。また $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ は「ナブラ (nabla)」という演算子で、ベクトル解析でよく用いられる演算子である¹⁷。このとき、 C の始点と終点をそれぞれ \mathbf{r}_0 と \mathbf{r}_N と書くことにすると、

¹⁵ 分割の方法は任意 (等分割でなくてよい) だが、すべての区間は $N \rightarrow \infty$ で長さがゼロになることは要請する。この方法で、線積分が well-defined である (曲線の分割に仕方に値が依存しない) ことは証明出来る。

¹⁶ 力 \mathbf{F} が時刻 t にも依存する場合、仕事は $\int_0^\tau \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$ と書ける。

¹⁷ 教科書によっては ∇U を $\text{grad } U$ と書き、「 U の勾配 (gradient)」と呼ぶこともある。

微分積分学の基本定理 $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$ と同様にして

$$\int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_N) - U(\mathbf{r}_0) \quad (2.8)$$

となることが示せる。特に左辺の線積分の値は、経路の始点と終点にのみ依存し、途中の経路の詳細によらなくなる。

さて、運動エネルギー K に「ポテンシャルエネルギー (potential energy : 位置エネルギーとも)」 U を加えたもの、 $E = K + U$ を、質点全体の「エネルギー (energy)」と呼ぶことにする。すると、ポテンシャル力以外に外から力は加わっていない状況では、

$$K(\tau) - K(0) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_N) = U(0) - U(\tau) \quad (2.9)$$

が成り立つ。つまり、 $E = K + U$ は時間変化しない。これを「エネルギー保存則 (law of energy conservation)」という。物体が複数あり、物体間に相互作用が働いている場合にも、相互作用がポテンシャル $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ を用いて

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\nabla_j U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_j} \\ \frac{\partial U}{\partial y_j} \\ \frac{\partial U}{\partial z_j} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

と書けるならば、やはり同様にエネルギー保存則は成り立つ。そのため、例えば二つの粒子がばねでつながれて運動している状況では、「各粒子の運動エネルギー + 各粒子のポテンシャルエネルギー + ばねのポテンシャルエネルギー」の全エネルギーは (外力がなければ) 保存する。

1次元の物体の衝突において、はね返り係数が1である衝突を「完全弾性衝突 (elastic collision)」という。ただしはね返り係数 e は、衝突前後の2物体 A,B の速度をそれぞれ v_A, v_B, v'_A, v'_B とすると、

$$e = - \frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} \quad (2.11)$$

で定義される。特に両物体が外力を受けずに運動している場合には¹⁸、完全弾性衝突とエネルギー保存は等価である。この事実を確認しておこう。物体 A,B の質量を m_A, m_B とすると、運動量保存則とエネルギー保存則はそれぞれ

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \quad (2.13)$$

と書ける。これは

$$m_A (v_A - v'_A) = -m_B (v_B - v'_B) \quad (2.14)$$

$$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = -m_B (v_B - v'_B)(v_B + v'_B) \quad (2.15)$$

と変形できるが、式 (2.15) を式 (2.14) で割ることにより、はね返り係数 $e = 1$ の式を得る。逆に $e = 1$ なら $v_A + v'_A = v_B + v'_B$ なので、これを式 (2.14) にかけることによりエネルギー保存則 (2.15) を得る。

なお、2次元以上の空間中の物体の衝突の場合には、衝突面に垂直な方向に対して式 (2.11) が成り立つことを完全弾性衝突という¹⁹。その場合にも外力がなければエネルギー保存との等価性は相変わらず成り立つ。

[2-1] (おはじきの衝突と散乱) : 同じ重さのおはじきを二つ用意する。一方を机に静止させて置き、もう一方を滑らせてぶつける状況を考えよう (図 5)。このとき、外力が働かないならば、衝突後の二つのお

¹⁸より一般に、撃力を受けている状況 (一方の物体が固定されているなど) でないならば、完全弾性衝突のエネルギー保存の等価性は成り立つ。

¹⁹衝突面に水平な方向の運動については、すべり条件や摩擦などの条件に依存している。

はじきの飛んでいく向きのなす角度は直角になることを示せ。(気になる人はコインなどで実際に実験してみよ。直角で飛んでいくことは確認できると思う)。

また、実際にコインの実験をしてみると、摩擦の無視できない机の上でも直角に飛んでいく状況は再現できる。摩擦という外力があるにもかかわらずなぜこの結果は再現できるのか考察せよ。

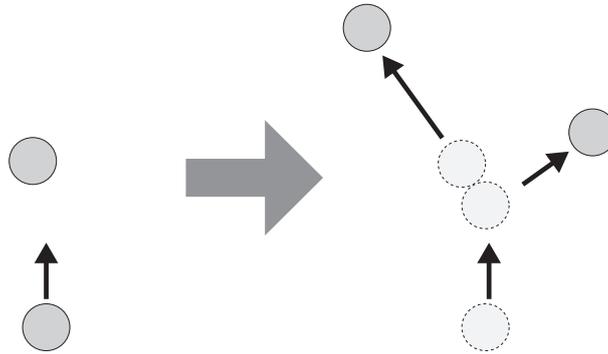


図 5: 二つのおはじきの衝突実験の模式図。

[2-2] 図 6 のような、摩擦のないレール上に二つの質点 1,2 がある。レールは中央部分は水平、両端はそれぞれ上に上がっていくように傾いている。系全体には重力加速度 g の一様重力がかかっている。

質点 1 を左の傾いたレール上に、質点 2 を中央の水平なレール上に、それぞれ初速度を持たないように置いた。すると質点 1 はレールを右向きに滑り降り、質点 2 と完全弾性衝突した。衝突後、質点 1 は左向きに、質点 2 は右向きに運動をはじめ、両質点は全く同じ高さまで登った後、向きを変えて下り始めた。

水平なレールを基準として、最初に質点 1 を置いた地点の高さを h とする。衝突後に両質点が最初に向きを変える地点の高さを求めよ。

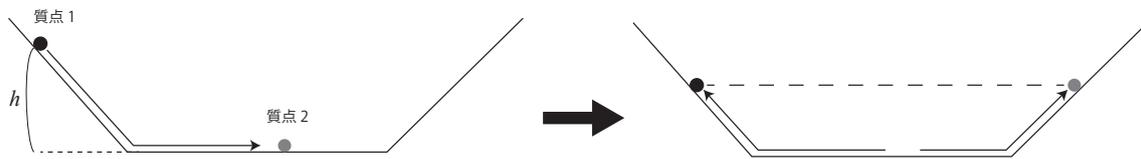


図 6: 二つの質点の運動の様子

2.3 (数学): 外積

ここでは、次の節の説明のため、3次元実ベクトル²⁰ 同士の「外積 (exterior product²¹)」の性質をみておこう。

二つの3次元ベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} の間の外積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ が与えるベクトルは、二つのベクトルのなす角の大きさを θ とすると、

- 長さは $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$ (\mathbf{A} と \mathbf{B} のなす平行四辺形の面積)
- 向きは \mathbf{A} と \mathbf{B} とともに垂直な向き (これだけだと上下二方向ありうるが、 \mathbf{A} から \mathbf{B} に回す際に右ねじの向きとなる方向にとる)

となるようにとる。第一の性質により、同じベクトル同士の外積はゼロである ($\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$)。外積を成分表示すると

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

²⁰ 複素ベクトルの場合の外積はあまり考えないが、外積の満たす諸々の関係式を成り立たせるように定義を拡張するには、実ベクトルで定義されたような外積をとった後に全体の複素共役をとるとうまく定義できる。

²¹ 内積が「inner product」なので、外積は「outer product」かなともうかもしれないが、「outer product」は二つのベクトルの直積・テンソル積のことを指し、ここでいう外積とは異なるものを指している。

と書ける²²。内積は一般の次元のベクトルに対して定義されているのに対し、外積は3次元ベクトル同士でしか定義されていない点に注意しておこう²³。

[2-3] \mathbf{A}, \mathbf{B} は互いに平行ではなく直交もしていない非ゼロの3次元実ベクトルとする。以下のベクトル $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ について、正しく述べているものを下の選択肢からそれぞれ選べ。

$$\mathbf{V}_1 := ((\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{V}_2 := (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})) \quad (2.18)$$

選択肢

1. このベクトルは \mathbf{A} と平行な非ゼロのベクトルである
2. このベクトルは \mathbf{B} と平行な非ゼロのベクトルである
3. このベクトルは $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ と平行な非ゼロのベクトルである
4. このベクトルは $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ のどれとも平行でない非ゼロのベクトルである
5. このベクトルはゼロベクトルである

(注：すぐ下にベクトル三重積の公式があるが、これを用いてもベクトルの向きを考える上ではあまり役に立たない。外積をとるとベクトルの向きがどうなるのかを頭の中でイメージしながら解く方がよい。)

外積をとった後に内積をとる計算をする際、以下のスカラー三重積の公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (2.19)$$

が役立つことがある。また、外積を2回とる状況も力学の計算ではしばしば出現するが、これを計算するには、ベクトル三重積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

が便利である。これらの関係式は成分を直接計算すれば正しいことが確認できる。

2.4 角運動量保存則

ある点から見た質点の「回転の度合い」を与える量として「角運動量 (angular momentum)」を導入しよう。原点周りの質点の角運動量 \mathbf{L} は、原点からの質点の位置 \mathbf{r} とその質点の運動量 \mathbf{p} との間を外積

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

で定義される。原点以外の点を基準点にとった場合には、その基準点から質点の位置までのベクトルが \mathbf{r} となる。質点が複数ある場合には、全ての質点の角運動量を足し合わせたものを、その質点たち全体の角運動

²²これが向きの条件 \mathbf{A}, \mathbf{B} と直交) を満たすことは直接内積を計算することで簡単に確認できる。長さについては、煩雑だが頑張ると $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$ が示せるので、ここから長さの条件を満たすことが言える。

もう少し工夫した成分表示の導出方法としては、定義から分配法則 $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{D} \times \mathbf{A}$ が成り立つことが確認できるので、これを用いてベクトルを単位ベクトルに展開し、各単位ベクトルごとに外積を計算することでこの成分表示が成り立つことを確認するのが早い。

²³実は外積をとると、もともと3階の1テンソルだったベクトルが、3階の2テンソルに移されるが、3階の2テンソルも3階の1テンソルと同様に3変数で指定されるので、両者が自然に同一視でき、その結果3次元の場合にはベクトルを出力に持つような外積が定義出来る(正確にはホッジ作用素というものを使って双対をとっている)。一般次元の場合には、一般のベクトル空間 V に対し、 $a, b \in V$ から $a \wedge b \in V \wedge V$ への「ウェッジ積 (wedge product)」として

- 交代性: $a \wedge a = 0$
- 分配則: $(pa + qb) \wedge c = p(a \wedge c) + q(b \wedge c)$ ($p, q \in \mathbb{C}$ or \mathbb{R})
- 結合則: $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

を満たすものが定義できる。このような演算が定義された代数を外積代数という。 $(a + b) \wedge (a + b) = 0$ より、重要な性質である交代性 $a \wedge b = -b \wedge a$ が導ける。外積代数は、微分形式の理論を展開するうえで基礎となる記述枠組である。

量と定義する。

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{L}_i \quad (2.22)$$

角運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m \dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m \ddot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times m \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.23)$$

と計算できる。ただし最後の等式では同じベクトル同士の外積がゼロとなることを用いた。最右辺の和の中の $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ は、質点 i の回転運動を変化させる度合いを与える量である。これを、質点 i に対する「トルク (torque)」という。

特に複数の質点がある系で、外部からのトルクがかかっていない状況を考えよう。外部からトルクが働かない状況としては、外力そのものが存在しない状況以外に、原点 (基準点) の向きの力が各質点にかかっている状況がある。例えば、太陽の周りを運動する惑星は、惑星に働く力は太陽の向きの万有引力なので、太陽を原点にとった場合にはトルクは働かない (この問題は後の章で扱う)。外力が上記の条件を満たすとき、強い作用反作用の法則が成り立つとすると、角運動量は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{in}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

と、時間変化しないことが分かる。これを「角運動量保存則 (law of angular momentum conservation)」と呼ぶ。運動量保存則と同じく、角運動量保存則もまた成分ごとに成り立つ。例えば、質点に働く力が全て z 軸に垂直な向きである場合、 z 方向の角運動量 L_z は保存する (一般には L_x と L_y は保存しない)。

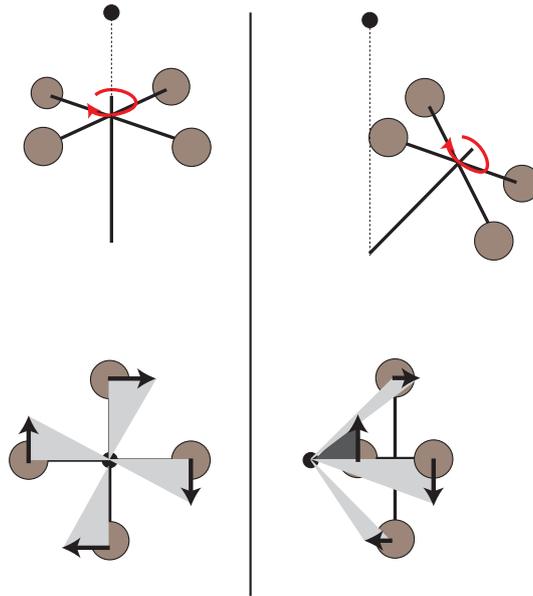


図 7: 左: まっすぐの軸で回転しているコマ。右: 回転軸が少し傾いたコマ。下図はそれぞれを z 軸真上から見た図。グレーの面積が角運動量 (の半分)。コマが傾いたことによって、 z 軸の角運動量が変化している。なお、濃いグレーの部分はマイナスで角運動量に寄与する点に注意。

これまで見てきた保存則の応用例として、コマが倒れない仕組みを考えることにしよう。定量的な解析はこの講義の後半で扱うので、ここでは「コマが倒れない」という定性的な側面にだけ絞って簡潔に取り扱うことにする。(コマが倒れないぐらいではたいて面白くもないと感じる人は、地球ゴマの一方の端を固定したうえで軸を水平にして回すと、コマが重力に従って落ちずに水平な姿勢を保って回り続ける²⁴ 現象などを思い浮かべてほしい。)

簡単のため、コマのモデルとして「軸のある点から四方に横棒が伸び、その先端に質点を取り付けられて

²⁴ 「地球ゴマの色々な遊び方」 https://www.youtube.com/watch?v=yi9dKXH_MAQ の 3 分 30 秒あたりから動画が見れる

いる」というものを考えることにしよう (図 7)。コマの接地点は動かず、また摩擦もないものとする。このコマは軸を中心に反時計回りに回転している。質点に働く外力は鉛直下向きの重力のみとする。

今、コマの軸が地面方向に少し倒れたとしよう。このとき、この系の原点における z 軸方向の角運動量を考えよう。下向きの重力は z 軸に平行であり、また棒の抗力も原点を通過する力なので、 z 軸方向の角運動量は保存する。だが、この系を真上から見ると、図 7 のようにコマが倒れることで z 軸方向の角運動量は減少してしまう。そのため、この減少を埋め合わせるように、コマの軸自体が z 軸を中心に回り始める。これがコマの首振り運動、あるいは「歳差運動 (precession motion)」である。

このように、コマが倒れるとその分だけコマの軸自体が z 軸周りに回転しないといけないが、あまり速く回転することはエネルギー保存則で禁止されている。コマのエネルギーは保存しているので、「コマの軸の歳差運動に伴う運動エネルギー」は「コマが倒れたことによって獲得した重力のポテンシャルエネルギー」と釣り合わないといけない。コマが素早く回転している場合、運動量保存則を埋め合わせるのに必要な z 軸周りの軸の回転速度もまた大きくなる、すなわちそれに必要な運動エネルギーも大きくなるが、コマが倒れることで獲得できる重力のポテンシャルエネルギーはあまり大きくない。そのため、コマは重力に従って倒れることが出来ず、首振り運動を続けるのである。

3 (数学): 微分方程式

本章では、力学の問題の数学的基礎である微分方程式について簡単に扱う²⁵。

3.1 演算子の考え方、微分方程式の分類

微分方程式 (differential equation) を実際に解く前に、もう少し抽象的な視点から微分方程式を眺めておこう。

「関数」というのは、数を入力すると数が出力されるようなものであった。例えば、 $f(x) = x^2 + 2x$ という関数は、数の入力に対し

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow 0 \\ 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように数を出力するものである。そして、「方程式 $f(x) = 8$ 」という問題は、「関数 f に何を入力したら 8 が出力されるのか」を考える問題だと見ることが出来る (上の例なら答えは $x = 2, -4$)。

関数は入出力が数であったが、「演算子 (operator)²⁶」は関数を入力すると関数を出力するものである。演算子の代表例としては「微分」がある。これは様々な関数の入力に対し

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow 2x \\ \sin x &\rightarrow \cos x \\ \ln x &\rightarrow \frac{1}{x} \\ &\vdots \end{aligned}$$

のように関数を出力するものである。もっと簡単な演算子としては「関数に 1 を足す」「関数に x^2 をかける」「関数を 3 乗する」などもある。

y を x の関数 $y(x)$ とし、演算子 $\mathcal{F}(y)$ として「 y を微分して、さらに y の -1 倍を足す」というものを考えよう。つまり、 $\mathcal{F}(y) = y' - y$ である (y' で y の微分を表す。以下同)。微分方程式は、例えば

$$\mathcal{F}(y) = e^x \tag{3.1}$$

という形で与えられる。これは、

$$y' - y = e^x \tag{3.2}$$

という微分方程式のことである。この微分方程式は「 \mathcal{F} に何を入力したら e^x が出力されるのか」を考える問題だと見ることが出来る (答えは $y = xe^x + Ce^x$ 、ただし C は任意定数)。このように考えると、微分方程式というものが、普通の (二次方程式などの) 方程式と同じように「方程式」と呼ばれている理由が分かる。

さて、任意の x の関数 y, z 、任意の数 a, b について、

$$\mathcal{F}(ay + bz) = a\mathcal{F}(y) + b\mathcal{F}(z) \tag{3.3}$$

が成り立つとき、この演算子は「線形 (linear)」であるという。任意の階数の微分演算子、積分演算子、掛け算 (関数を 2 倍する、関数に x^3 を掛ける、など) はすべて線形演算子である。線形演算子の和も線形演

²⁵ 本章及び次章の内容に対応する、微分方程式の物理学者向けの簡単な解説としては、田崎晴明『数学 物理を学び楽しむために』第 5 章および第 8 章がある。また、もう少し数学的だが読みやすい教科書としては、稲見武夫『常微分方程式』岩波書店がある。ただしどちらの議論の仕方も、この講義テキストでの議論の仕方とはやや異なる。

²⁶ 「作用素」ともいう。物理を念頭に置いた文脈では「演算子」、数学を念頭に置いた文脈では「作用素」ということが多い。英語はどちらも「operator」なので、両者は同じものを指しており、あくまでも翻訳の問題に過ぎない。

算子になる。一方、べき乗（関数を 2 乗する）や足し算（関数に 1 を足す）などは一般に非線形な演算子である。

本題に入る前にいくつか言葉の定義をしておこう。例えば、以下のような微分方程式を考えよう。

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a\frac{d}{dx}y + by = f(x). \quad (3.4)$$

ここで、 a, b は定数である。このように、未知関数 y がただ一つの変数（この場合は x ）を持つ微分方程式を「常微分方程式 (ordinary differential equation)」という²⁷。

- n 階 (n -th order) の微分方程式
 - 式 (3.4) は微分の最高次が $n = 2$ なので ($\frac{d^2y}{dx^2}$ のこと)、2 階の微分方程式である。
- 斉次 (homogeneous) ・ 非斉次 (inhomogeneous) 方程式
 - 斉次²⁸: 式 (3.4) で $f(x) = 0$ の場合。
 - 非斉次: 式 (3.4) で $f(x) \neq 0$ の場合。
- 線形 ・ 非線形
 - 線形: 式 (3.4) のように、左辺の y に対する演算子が線形演算子であるもの。
 - 非線形: 左辺の y に対する演算子が線形演算子ではないもの。 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = 0$ や $\frac{dy}{dx} + by^2 = 0$ などは非線形である。
- 定数係数か否か
 - 定数係数: 式 (3.4) のように、微分にかかっている係数 a, b が定数であるもの。
 - それ以外: 例えば $\frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y = 0$ は、一階の微係数にかかっている係数が定数ではなくて x なので、これは定数係数ではない線形微分方程式である。

後で見ると、線形の定数係数微分方程式は機械的に解くことができる。

微分方程式の解を、いくつかのパラメータ付きの形で表したものを「一般解 (general solution)」、パラメータに特定の値を入れた解を「特解 (particular solution)」と呼ぶ。一般に、 n 階の微分方程式においては、初期値パラメータが $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$ の n 個あり、それに応じて n 階微分方程式の一般解にもパラメータが n 個ある²⁹。

なお慣習的に、微分を

$$y' := \frac{d}{dx}y, \quad y^{(n)} := \frac{d^n}{dx^n}y \quad (3.5)$$

と表記する。本章では、途中までは $\frac{d}{dx}$ を明確に書くが、途中からは略記も並行して用いる。

3.2 定数係数線形斉次微分方程式

ではまず、もっとも単純な微分方程式である、定数係数線形斉次微分方程式

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dx}y + a_0y = 0 \quad (3.6)$$

を考えよう。ただし y は x を引数を持つ関数 $y(x)$ のことで、 a_{n-1}, \dots, a_0 は定数である。以下引数は省略することが多い。

非常に重要な性質として、定数係数線形斉次微分方程式は一般解が存在する。そのため、定数係数線形斉次微分方程式は必ず解くことができる。ここではその導出を見ることにしよう。

²⁷ 未知関数が複数の変数を持つ微分方程式は「偏微分方程式 (partial differential equation)」という。ここでは常微分方程式のみを取り扱う。

²⁸ 「せいじ」と読む

²⁹ どのような微分方程式がこの性質を持つと言えるかの詳細は、3.8 節を見ていただきたい。

まず、一階の場合

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \quad (3.7)$$

を考えよう。この微分方程式は「 $y(x)$ は、微分すると自分と同じ形（ただし $-a$ 倍）が出てくる関数である」と述べている。微分しても同じ形になる関数は指数関数であることをすでに知っているのので、指数関数

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad (3.8)$$

が解であると分かる³⁰ (C は初期値に依存するパラメータ)。 y に作用する演算子を全体としてくくと、この微分方程式 (3.7) は

$$\left[\frac{d}{dx} + a \right] y = 0 \quad (3.9)$$

とも書ける。

この見方は、二階以上の定数係数線形斉次微分方程式の一般的構造を理解するうえで役に立つものである。二階の定数係数線形斉次微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy = 0 \quad (3.10)$$

を考えよう³¹。ただし p, q は定数（一般には複素数）である。これは

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + (p+q)\frac{d}{dx} + pq \right] y = 0 \quad (3.11)$$

とも書ける。ここで演算子を「因数分解³²」して

$$\left[\frac{d}{dx} + p \right] \left[\frac{d}{dx} + q \right] y = \left[\frac{d}{dx} + q \right] \left[\frac{d}{dx} + p \right] y = 0 \quad (3.12)$$

とすると、この微分方程式は一階の場合に出てきた演算子の積の形になっている。ただしこの意味は、式 (3.12) の左辺ならば「関数 y に演算子 $\frac{d}{dx} + q$ がまず作用して何か別の関数になり、それに続けて演算子 $\frac{d}{dx} + p$ が作用する」ということである。より一般に、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ を未知変数 s と置きなおして得られる s についての方程式の解を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 、それぞれの解の縮重度（重解の個数）を n_i とすると、この微分方程式は

$$\prod_i \left[\frac{d}{dx} - \lambda_i \right]^{n_i} y(x) = 0 \quad (3.13)$$

と因数分解できる。

まず $p \neq q$ の場合に微分方程式を解こう。因数分解 (3.12) の形と微分方程式の線形性より、

$$\left[\frac{d}{dx} + q \right] y_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$\left[\frac{d}{dx} + p \right] y_2 = 0 \quad (3.15)$$

を満たす y_1, y_2 を用いて

$$y = y_1 + y_2 \quad (3.16)$$

と書ける y は、元の微分方程式 (3.10) を満たす。 y_1, y_2 の解はすでに知っているのので、これを代入すると

$$y(x) = C_1 e^{-qx} + C_2 e^{-px} \quad (3.17)$$

がこの微分方程式の解と分かる。ただし C_1, C_2 は初期値に依存したパラメータである。（解きたい微分方

³⁰ 指数関数しか解がないことをここでは確認していないが、最後に見る変数分離法を適用することで、指数関数を直接導くことも出来る。また、解が一つしか存在しないことを、微分方程式の一般論から確認することも出来る。

³¹ 任意の二階の定数係数線形斉次微分方程式はこの形で書ける。

³² このような因数分解が正当化されるのには、微分演算子 $\frac{d}{dx}$ と数 p, q とが可換であること ($\frac{d}{dx} p f(x) = p \frac{d}{dx} f(x)$) が重要である。もし p, q が数ではなく x の関数だったとしたら、このような単純な因数分解は行えない。

程式は二階の微分方程式で、この解にはパラメータが二つ出てきているので、これで解はすべて得られている)。

状況が複雑になるのは $p = q$ の場合である。この場合には、上と同じような考え方をしても $y_1 = Ce^{-px}$ しか得られず、パラメータは一つしかない。これは二階の微分方程式なので、これとは異なる解がもう一つ存在するはずである。その解は

$$\left[\frac{d}{dx} + p \right] y_2 \neq 0 \quad (3.18)$$

だが

$$\left[\frac{d}{dx} + p \right] \left[\frac{d}{dx} + p \right] y_2 = 0 \quad (3.19)$$

を満たすものでないといけない。つまり y_2 は

$$\left[\frac{d}{dx} + p \right] y_2 = De^{-px} \quad (3.20)$$

を満たす (D はパラメータ)。このような y_2 としてどのようなものがあるか考えると、

$$y_2(x) = D \cdot xe^{-px} \quad (3.21)$$

がこの条件を満たすことが分かる³³。なので、 $p = q$ の場合の解は

$$y(x) = Ce^{-px} + Dxe^{-px} \quad (3.23)$$

だと分かる。

ここまでの構造が分かれば、一般の定数係数線形斉次微分方程式の解も簡単に求まる。微分方程式が式 (3.13) で書かれているように因数分解できたとする³⁴ と、この微分方程式の解は

$$y(x) = \sum_i f_i(x)e^{\lambda_i x} \quad (3.24)$$

と書ける。ただし $f_i(x)$ は任意の $n_i - 1$ 次多項式である。

[3-1] 以下の微分方程式を解け。ただし、次の節のオイラーの公式も利用して、答えは実数のみの形で表すようにすること。

$$\frac{d^3}{dx^3} y + y = 0 \quad (3.25)$$

3.3 オイラーの公式

ここで、二次方程式の解は一般には複素数なので、複素数の指数関数が出てきてしまう点を疑問に思うかもしれない。例えば、単振動の式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega^2 x = 0 \quad (3.26)$$

と書けるが、これは定数係数線形斉次微分方程式なので、前節の一般論で解くことができる。その左辺は

$$\left[\frac{d}{dt} + i\omega \right] \left[\frac{d}{dt} - i\omega \right] x = 0 \quad (3.27)$$

³³ ここでは天下りに解を与えてしまったが、この解の形にはある程度理由もある。 $p \neq q$ の場合の一般解は、 e^{-px} と $(e^{-qx} - e^{-px})/(p - q)$ の線形結合とも書くことができる。ここで、 $q \rightarrow p$ の極限をとれば、二つ目の一般解は

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{p - q} = xe^{-px} \quad (3.22)$$

となり、これは $p = q$ の場合の一般解である。着想としては、 $p \rightarrow q$ の場合には解同士が同じものになってしまうが、それらの足し引きをうまく考えることで、元々の一般解が極限で $\frac{0}{0}$ の形となり、かつこれが非自明な収束先を持つようにすれば、その収束先の関数が求めたい一般解となるだろう、というものである。

³⁴ 代数学の基本定理により、 n 次方程式は複素数の中に重解込みで必ず n 個の解を持つことが証明されている。そのため、その解を用いれば必ず左辺はこの形に変形できる。

と因数分解できるので、一般解は

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t} \quad (3.28)$$

と求まり、虚数の指数関数が現れる。

この解は、高校で習った単振動の解

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.29)$$

とは見た目が異なるように見える。しかし、実はこれらは、実数 x に対する「オイラーの公式 (Euler's formula)」

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.30)$$

を使うと結びつけることができる。またこの例に限らず、複素数の指数関数はオイラーの公式を用いて計算することができる。

オイラーの公式 (3.30) は、テイラー展開を習った後であれば、指数関数及び三角関数のテイラー展開を比較することで導出することができる。しかし、テイラー展開を使わなくても、以下のような議論から、この関係式が妥当なものであることを確認することができる。

我々は (実数の) 指数関数について色々知っているような気がするが、実は諸々の指数関数の性質は、以下の二つの関係から導くことができる。

- 加法性: $e^x e^y = e^{x+y}$
- 微分の値: $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$

なので、オイラーの公式によって拡張された複素数の指数関数が、この二つの関係を満たしているかを確認することで、オイラーの公式が妥当なものだとみなすことができる。

まず加法性から確認しよう。これは三角関数の加法定理により

$$e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} \quad (3.31)$$

と確認できる。また、微分の値は、三角関数の微分を思い出せば

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = \frac{d}{dx} (\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x = i e^{ix} \quad (3.32)$$

となり、これもまた満たされる。よって、オイラーの公式は正しく指数関数の複素数への拡張を与えていると考えられる。

では、単振動の二つの解、式 (3.29) と式 (3.28) が一致することを確認しよう。オイラーの公式を使うと、一般論で得られた式 (3.28) は

$$x(t) = (C_+ + C_-) \cos(\omega t) + i(C_+ - C_-) \sin(\omega t) \quad (3.33)$$

と書き直せる。よって

$$A := C_+ + C_- \quad (3.34)$$

$$B = i(C_+ - C_-) \quad (3.35)$$

と置けば、これは高校で習った解 (3.29) になる。

3.4 線形非斉次微分方程式

次に、先程の線形斉次微分方程式に加え、 x だけの関数の項 $f(x)$ があるような、線形非斉次微分方程式

$$\frac{d^n}{dx^n} y + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} y + \cdots + a_1(x) \frac{d}{dx} y + a_0(x) y + f(x) = 0 \quad (3.36)$$

を考えよう。今は定数係数に限らない。実は、(定数係数に限らず) 線形微分方程式の場合には、斉次微分方程式と非斉次微分方程式との間には密接な関係がある³⁵。

対応する線形斉次微分方程式が解けている状況を考えよう。例えば、以下の定数係数線形非斉次微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy + f(x) = 0 \quad (3.37)$$

ならば、対応する線形斉次微分方程式は式 (3.10) であり、この解はすでにすべて求めている。記号を見やすくするため、対応する線形斉次微分方程式の左辺を与える演算子を $\mathcal{F}y := \frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy$ と書くことにしよう。対応する線形斉次微分方程式が解けているというのは、 $\mathcal{F}y = 0$ を満たす y をすべて得られているということである。この解の集合を S と書くことにする。

さてここで、式 (3.37) を満たす解 $Y(x)$ を一つ見つけることが出来たとしよう。このとき、すべての解は

$$\text{「対応する斉次方程式の一般解 } g(x) \in S \text{」} + \text{「非斉次方程式の一つの特解 } Y(x) \text{」} \quad (3.38)$$

の形で書かれ、またこの形で尽くされている。以下この事実を示そう。

式 (3.38) の形で書かれる関数が、微分方程式 (3.37) の解となることの確認は簡単である。仮定より、 $g(x) \in S$ ならば $\mathcal{F}g(x) = 0$ 、また $\mathcal{F}Y(x) + f(x) = 0$ なので、

$$\mathcal{F}(g(x) + Y(x)) + f(x) = \mathcal{F}g(x) + \mathcal{F}Y(x) + f(x) = 0 \quad (3.39)$$

となり、解であることが分かる。ここで、演算子 \mathcal{F} の線形性を用いた。

次に、微分方程式 (3.37) のすべての解が式 (3.38) の形で書かれることを示そう。ある関数 $Z(x)$ が微分方程式 (3.37) の解である、つまり $\mathcal{F}Z(x) + f(x) = 0$ を満たすとすると、再び演算子 \mathcal{F} の線形性を用いると、 $h(x) := Z(x) - Y(x)$ は

$$\mathcal{F}h(x) = \mathcal{F}(Z(x) - Y(x)) = (\mathcal{F}Z(x) + f(x)) - (\mathcal{F}Y(x) + f(x)) = 0 \quad (3.40)$$

を満たすことが分かる。つまり $h(x)$ は対応する線形斉次微分方程式の解である ($h(x) \in S$)。よって、どのような微分方程式 (3.37) の解 $Z(x)$ も $Z(x) = h(x) + Y(x)$ という形で書ける。これは示したかったことである。

以上の理由により、対応する斉次線形微分方程式が解けている場合、非斉次線形微分方程式は特解を一つ求める問題に帰着される。対応する斉次方程式が解けている場合には、一般的に特解を求める方法も存在はする³⁶ が、階数が低く定数係数の場合には、一般論を用いるよりも泥臭く代入して解を探した方が素早く解が見つかることが多い。

例として、

$$\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx} \quad (3.41)$$

という線形非斉次微分方程式を解いてみよう。ただし m, a は定数であり、 $m + a \neq 0$ とする。ともかく左辺から e^{mx} という形の関数が出てこないといけないので、 y も e^{mx} のような形の項を含むだろうと予想する。 $y = e^{mx}$ を左辺に代入してみると、

$$\frac{d}{dx}e^{mx} + ae^{mx} = (m+a)e^{mx} \quad (3.42)$$

となる。右辺は e^{mx} なので、このままだと $m+a$ 倍だけ大きくなっている。なので全体を $m+a$ で割って

$$y = \frac{e^{mx}}{m+a} \quad (3.43)$$

³⁵ ウェブで読めるテキストだと、田崎『数学：物理を学び楽しむために』8.2.2 節にも非斉次微分方程式の斉次微分方程式との関係や特解の求め方が出ている。このテキストとはやや異なる特解の求め方も紹介されているので、併せて読んでみていただきたい。

³⁶ グリーン (Green) 関数の方法やラグランジュ (Lagrange) の定数変化法、定数係数の場合にはミクスンスキー (Mikusiński) の演算子法などが知られている。グリーン関数の方法については 3.7 節で述べる。

とすれば、これが特解になっていることは簡単に確認できる。大雑把な特解の探し方として、非斉次項が

$$\begin{aligned} e^x &\rightarrow e^x \\ \sin x, \cos x &\rightarrow A \sin x + B \cos x \\ x^n + ax^{n-1} + \dots &\rightarrow n \text{ 次以下の多項式} \end{aligned} \quad (3.44)$$

という感じで探すとよい。なお、これで解が見つからない場合は、 e^x や $\sin x$ の場合、これらに多項式をかけたもの (xe^x など) を探してみるとよい。これは、式 (3.10) の $p = q$ の場合にも見たようなテクニックである。

[3-2] 以下の非斉次線形微分方程式の解をすべて求めよ。

$$(1) y' + ay = x^2 \quad (3.45)$$

$$(2) y' + ay = e^{-ax} \quad (3.46)$$

定数係数とは限らない一般の線形非斉次微分方程式に対して、この節で見た議論は成り立つ。なので、一般の線形非斉次微分方程式においても「対応する線形斉次方程式の一般解」+「一つの特解」で一般解は書ける。問題は、定数係数ではない場合には「対応する線形斉次方程式の一般解」が必ずしも求まらない点である。しかし逆に言えば、うまく「対応する線形斉次方程式の一般解」を求めさえすれば、あとは一つ特解を求めるだけで、定数係数でなくとも一般解はすべて求まる。

3.5 一階非線形微分方程式に対する変数分離法

ここまで、線形微分方程式を対象に、さまざまな解き方を見てきた。ここでは対象を変え、あるタイプの1階の非線形微分方程式に関して有効な方法である変数分離の方法を見よう。変数分離の方法を用いれば、いくつかの非線形微分方程式は解くことができる。

変数分離の方法が使えるのは、1階の微分方程式で、微分項以外が、微分する変数 x の関数と微分される関数 y の関数の積になっている場合である。つまり、以下の形で記述可能な場合である。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (3.47)$$

これは以下のように解くことができる。まず全体を $g(y)$ で割り、両辺を x で積分する。すると

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \quad (3.48)$$

が得られる。ここで、左辺の積分の変数を x から y に変換すると、

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (3.49)$$

となる³⁷。後はこの積分を実行すれば、求めたい微分方程式の解が得られる。

特別な場合として、 $g(y) = -y$ の状況を考えると、これは定数係数ではない1階の線形斉次微分方程式

$$\frac{d}{dx}y + f(x)y = 0 \quad (3.50)$$

そのものである。これまで見てきた線形非斉次微分方程式の一般解の性質や特殊解を求める方法は、定数係数でない場合にも適用できるので、これで1階の線形微分方程式の解き方は（斉次・非斉次、定数係数か否かを問わず）すべて見たことになる。

³⁷しばしばラフな説明で「式 (3.47) 全体に dx を掛けて分母を払った」というような言い方をすることもある。上記のラフな説明の背景にある計算は、ここで述べたようなものであり、これは数学的に正しい変形である。

[3-3] 下の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 y' は実変数 x についての微分である。

$$y' + xy + x^3 = 0 \quad (3.51)$$

3.6 初期値問題

力学などの物理の問題においては、初期状態が与えられており、そこからどのように状態が時間発展するか求めたいことが多い。これは微分方程式の言葉では、 $x = 0$ における初期値 $y(0), y'(0), \dots$ が与えられている状況に対応する。具体的な時間発展を得るには、微分方程式の一般解をまず解いたうえで、初期値を満たすようなパラメータを探せばよい。

一般に、 n 次の微分方程式には自由なパラメータが n 個ある。これを定めるため、初期値も n 個与えられる必要がある。例えば 1 次元の質点の運動であれば、微分方程式は 2 次方程式であり、自由なパラメータは 2 個存在するはずである。この 2 個のパラメータを定めるためには、初期時刻における位置と速度（微分の値）が与えられればよい。（特殊な場合を除けば、初期値ではなく「2 つの異なる時刻における位置」などを与えても、運動は定まる）

[3-4] 以下の方程式の、 $y(0) = 1, y'(0) = 3$ の解を求めよ。

$$y'' + 4y' + 4y + x^2 - 4x = 0 \quad (3.52)$$

3.7 <補論>：線形非斉次方程式に対するグリーン関数の方法

ここでは線形非斉次微分方程式で特解を見つけるための一般的方法である、グリーン関数の方法を見よう。具体例を用いた方が説明しやすいので、一般の外力を受けた減衰項付き単振動

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = f(t) \quad (3.53)$$

を解くことを考える。一般の線形非斉次微分方程式の場合への拡張は容易である。

これを解くための準備として、時刻 τ より前では粒子は $x = 0$ に静止 ($t < \tau$ で $x = 0, \frac{dx}{dt} = 0$) しており、時刻 $t = \tau$ で強さ 1 の撃力を受けた状況での時間発展

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = \delta(t - \tau) \quad (3.54)$$

の解を考えることにしよう。ただし $\delta(x)$ はディラック (Dirac) のデルタ関数で、任意の関数 $g(x)$ と $\varepsilon > 0$ に対し

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad (3.55)$$

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon} dx g(x) \delta(x) = g(0) \quad (3.56)$$

を満たす関数である (図 8)。イメージ的には、一点 $x = 0$ で無限大の値を、他の場所ではすべて 0 をとっていて、積分すると 1 になるような関数である³⁸。

グリーン関数は、式 (3.54) の解 $x = G(t; \tau)$ として定義される。すると $t = 0$ 周りの微小時間 $-\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$ での積分を考えることにより、 $G(t; \tau)$ は境界条件

$$x(\tau) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau} = 1 \quad (3.57)$$

の下での、対応する斉次微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = 0 \quad (3.58)$$

の解であることが分かる。斉次微分方程式はすでに解けているので、これを代入することで、グリーン関数

³⁸これは通常の意味での関数ではないが、超関数 (generalized function) 論の枠組では正当に取り扱うことが出来る。ここでは細かい点は気にせずに通常関数のようにとらえて議論を進める。

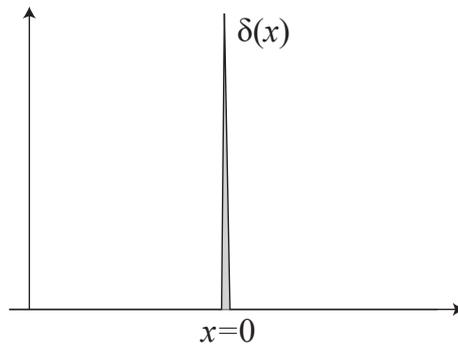


図 8: デルタ関数 $y = \delta(x)$ のイメージ図。点 $x = 0$ に、無限に細く無限に高いピークが立っている。グレーの領域の面積は 1 になるように、細さと高さの関係を保ちながら、幅をゼロ、高さを無限大に飛ばしている。

$G(t; \tau)$ は

$$G(t; \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(t - \tau)} - \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(t - \tau)} \quad (3.59)$$

と厳密に求まる。

これを用いると、特解は簡単に求められる。非斉次項は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t' - t) \quad (3.60)$$

と書けるので、これを「各時刻ごとに、重み $f(t)$ のデルタ関数が作用し、それが積み上がっている」と解釈することで、式 (3.53) の特解は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t'; t) \quad (3.61)$$

と形式的に求まる（グリーン関数は先程得られた式 (3.59) を代入する）。

3.8 <補論>：微分方程式の解の存在と一意性

これまで取り扱ってきた微分方程式においては、解の存在と一意性はある種自明視してきた。実際、微分方程式が物理現象を記述しているのであれば、当然時間発展が存在しかつそれは一意的である必要がある以上、解の存在と一意性は物理的には当然の性質に思える。しかし、数学的な微分方程式論の観点から見れば、解の存在と一意性は全く明らかではない³⁹。

幸い、常微分方程式の場合、解の存在と一意性はかなり広いクラスの問題に対し証明することが出来る。以下の形の一階の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + F(x, y) = 0 \quad (3.62)$$

を考える⁴⁰。すると、関数 $F(x, y)$ が点 (x_0, y_0) の近傍領域で連続であり、かつこの領域内の任意の（固定した） x に対し、 y の関数 $F(x, y)$ が y について一様にリプシッツ連続であるとする、この微分方程式は初期条件 (x_0, y_0) 近傍に解を持ち、それは一意的であることが証明できる（ピカル・リンドレフ (Picard-Lindelöf) の定理)⁴¹。ただし関数 $f(t)$ が「リプシッツ連続 (Lipschitz continuity)」とは、ある正定数 K が存在し、

³⁹ 例えば、流体を記述するナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式の解の存在と滑らかさを証明する（もしくは反証する）ことは、7つのミレニアム懸賞問題の一つにも選ばれている。

⁴⁰ 二回以上の微分方程式の場合は、 $y, y', y'' \dots$ をそれぞれ独立の未知関数 $y_0, y_1, y_2 \dots$ とみなしたうえで、 $dy_0/dx = y_1, dy_1/dx = y_2$ などの式を追加することにより、一階の連立常微分方程式に帰着できる。

⁴¹ 【コラム：より一般の微分方程式の解の存在と一意性】：常微分方程式の場合、 $F(x, y)$ のリプシッツ連続の条件を外して連続の条件だけにすると、解の存在は証明できる（ペアノの存在定理 (Peano existence theorem)、1890）が一意的性は保証できなくなる。偏微分方程式の場合には、同じように方程式を書いたときに F が解析的であれば解の存在と一意性を証明できる（コーシー・コワレフスカヤ (Cauchy-Kovalevskaya) の定理。コーシーは 1842 年に部分的な証明を与え、完全な証明はコワレフスカヤによって 1875 年に与えられた。)。その一方で、 F が無限回連続的微分可能であっても局所的にさえ解が存在しなくなるような方程式も存在する。レヴィーの例題 (Lewy's example) がその反例としてよく知られている（レヴィー、1957）。（詳細は竹井義次「解けない微分方程式をめぐって」 (<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/takei.pdf>) 参照)

任意の t, t' について

$$|f(t) - f(t')| \leq K |t - t'| \quad (3.63)$$

が成り立つことである。「 y について一様にリプシッツ連続」というのは、正定数 K が x によらない値であることを意味している⁴²。リプシッツ連続の直感的な意味は「傾きが一定以上に大きくならないこと」である。微分方程式の解の一意性のための上記条件を「リプシッツ条件」という。リプシッツ条件が満たされないと、微分方程式の解が複数現れたり、解が消滅したりするようなことが起こりうる。

通常の力学の系（例えば万有引力に従う質点系）において、有限時間の間に方程式の解が存在しなくなるケースとして最も起こりやすいのは衝突の状況である。例えば万有引力に従う二質点系で、二つの質点が万有引力に引かれてどんどん互いに接近していく状況では、有限の時間で二つの質点は衝突し、それ以降の時間発展は記述できなくなる。衝突以外の特異性は、ほとんどのまともな問題では無視してかまわない⁴³。なので物理では普通は微分方程式の解の存在と一意性は気にしないが、変数の取り方が不適切だと、運動そのものが正常な力学の系においても、微分方程式におかしなことが起きることはしばしばある。その例の一つを見てみよう。

重力環境下で、手で持っていた質量 m のボールを放し、落下させることを考える。ただし空気抵抗はないものとする。ボールの垂直方向の位置 x の従う方程式は

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \quad (3.64)$$

と書ける。初期条件は、 $x = x_0$ 、 $dx/dt = 0$ である。この方程式には何の異常性もなく、これまで見てきた方法で解くことができる。

さて、エネルギー保存則より

$$E = mgx + \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = mgx_0 \quad (3.65)$$

である。今、速度はゼロ以下（下向きへの運動）なので、これを变形して得られる

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2g(x_0 - x)} \quad (3.66)$$

も同じ運動を記述していると思える。

しかし、式 (3.66) 右辺は $x = x_0$ でリプシッツ条件を満たさない。そしてそれを反映し、式 (3.66) の解には、式 (3.64) の解以外の非物理的な解（微分方程式 (3.66) が任意の t で満たされているような関数 $x(t)$ ）が存在する。その一例は、

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + x_0 & t_0 < t \end{cases} \quad (3.67)$$

である。これは「手を離れた後、時刻 t_0 までは位置 x_0 にボールが浮いていて (!)、 t_0 を過ぎると通常の落下を始める」という解である。 t_0 は任意の正の実数をとれるので、式 (3.66) の解には、式 (3.64) の解以外の無数の解が存在することが分かる。

変数を適切にとっているにもかかわらず、現実の物理系の微分方程式において特異性や異常性が現れたとすると、それはほとんどの場合、その微分方程式（モデル）で記述可能な領域を系の状態が超えてしまったことを意味している。例えば完全流体の方程式の有限振幅進行波の解は、無限大の勾配が出現してしまうことがよく知られている。これは、「粘性が無視できる」という完全流体の仮定が、そのような激しい勾配の条件下では破綻してしまい、もはや現象は完全流体の方程式でよく記述されなくなるためである。例えば次の章で「発散していく振幅を持つ振動解」が得られる設定を扱うが、これももちろん実際には振幅が無限に大きくなるのではなく、対象とする物理系が「もはや大元の微分方程式でよく記述できる領域を超えてしまう」という形で、振幅は（ここには書かれていない何らかの要因によって）押さえられる。このように、

⁴² 連続的の微分可能な関数はリプシッツ連続な関数であり、リプシッツ連続な関数ならば連続な関数である。一方、微分可能でもリプシッツ連続とは限らず（例： $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ）、リプシッツ連続でも微分可能とは限らない（例： $f(x) = |x|$ ）。

⁴³ 【コラム：万有引力質点系における特異点】：万有引力に従う質点系の場合、3 体であれば衝突以外の特異点が存在しないことが証明されている（パルヴェ (Painlevé, 1895)。同時にパルヴェは 4 体以上であれば衝突以外の特異点（有限の時間内に質点が無限の速さに飛び去ってしまう解）が生じると予想（パルヴェ予想）し、5 体の場合についてはシャー (Xia) が具体例を 1988 年に構成した。ただし、4 体の場合に特異点に至る初期状態の測度はゼロであることは証明されている（サアリ (Saari, 1977)。詳細は F・ディアク、P・ホームズ『天体力学のパイオニアたち（上）』（シュプリンガーフェアラーク東京）第三章を参照）

微分方程式やモデルは「一定の範囲内の系の挙動をよく記述するために導入されたもの」であり適用範囲・適用限界があるということは、物理学の観点からは極めて重要である。

4 1次元空間中の運動

では前章で学んだことを、具体的な物理的設定に応用しよう。本章では、1次元空間中の物体の運動を考える。なお、物体は全て質点で近似できるものとする。

4.1 抵抗中の落下運動

まず、粘性抵抗中の落下運動を考えよう。一様加速度 g の下で落下する質点が、速度と反対方向に速度に比例する粘性抵抗⁴⁴ (viscous drag: 摩擦抗力とも) を受ける場合を考える。つまり、運動方程式が

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

あるいは速度の式として書くと

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (4.2)$$

で記述される状況を考える。ただし x は鉛直方向の位置で、下向きを正にとっている。位置は速度を積分すれば求められるので、以下では、初速度がゼロの場合の速度 $v(t) := \frac{dx}{dt}$ の一般解を求めよう。

式 (4.2) は、線形非斉次微分方程式そのものの形をしているので、すぐに解くことができる。対応する斉次方程式は

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v = 0 \quad (4.3)$$

なので、この一般解は

$$v(t) = C \cdot e^{-\gamma t/m} \quad (4.4)$$

と解ける。ただし C は初期条件に応じて定まる定数である。非斉次項を付け加えた場合の特解の一つは

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} \quad (4.5)$$

と簡単に求まる。よって式 (4.2) の一般解は

$$v(t) = C \cdot e^{-\gamma t/m} + \frac{mg}{\gamma} \quad (4.6)$$

である。今は $t = 0$ において $v(t) = 0$ という初期条件が与えられているので、これを代入して C を求められる。その結果、この初期条件の下での速度の解は

$$v(t) = -\frac{mg}{\gamma} \cdot e^{-\gamma t/m} + \frac{mg}{\gamma} \quad (4.7)$$

と求まる。十分時間が経った後の速度 (終端速度) は $\frac{mg}{\gamma}$ であり、終端速度に落ち着くまでの典型的な時間の長さは $\frac{m}{\gamma}$ で特徴づけられる。

さて、実は終端速度とそこに至るまでの典型的タイムスケールは、定数係数を無視するのならば、実は方程式を解かずとも次元解析だけで求まる。式 (4.2) に含まれる3つのパラメータの次元は、質量 m は M 、粘性抵抗 γ は M/T 、重力加速度 g は L/T^2 である。ただし M は質量、 T は時間、 L は長さの次元を表す。これらを組み合わせて速度 L/T の次元を作るには $\frac{mg}{\gamma}$ の組み合わせしか、時間 T の次元を作るには $\frac{m}{\gamma}$ の組み合わせしか存在しない。よって終端速度とそこに落ち着く典型的な時間の長さは、それぞれ $\frac{mg}{\gamma}$ と $\frac{m}{\gamma}$ (の定数倍) であると分かる。

では次に、粘性抵抗ではなく、速度の2乗に比例する慣性抵抗 (form drag: 形状抗力、圧力抗力とも) が働く場合を考えよう。つまり、運動方程式が

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa v^2 \quad (4.8)$$

⁴⁴この「速度に比例する抵抗」という設定は物理ではよく用いられるが、実は日常スケールの物理としてはやや人工的な設定である。机の上で物を滑らせた際の摩擦力は速度にはほぼ依存せず、液体・気体中の運動における抵抗は、余程粘性が強くて運動が遅くない限り、直後に見るような速度の二乗に比例する慣性抵抗が効いてくる。しかしここでは、そのような点には目をつぶり、速度に比例する抵抗の場合を考察することにする。

で記述される状況を考える⁴⁵。

今度変数分離型として解くことができる。式 (4.8) は

$$\int \frac{dv}{g - \frac{\kappa}{m}v^2} = \int dt \quad (4.9)$$

と変形できる。部分分数分解して左辺の積分を実行することで

$$\frac{m}{\kappa} \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v} \right) dv = \frac{m}{2\kappa a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C = t \quad (4.10)$$

と解ける。ただしここで $a := \sqrt{mg/\kappa}$ と置いた。全体を指数の方に乗せると

$$e^C \left| \frac{a+v}{a-v} \right| = e^{2\kappa at/m} \quad (4.11)$$

となる。 e^C が正の範囲しか取れないので、 $D = e^{-C}$ と⁴⁶ 定数の範囲を実数全体に広げると同時に $\frac{a+v}{a-v}$ の絶対値を外す⁴⁷。あとはこれを v について解き、初速度ゼロの条件を入れると

$$v(t) = -\frac{2a}{De^{2\kappa at/m} + 1} + a = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{2}{e^{2\sqrt{\kappa g/m}t} + 1} + \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \quad (4.12)$$

と解が求まる。終端速度は $\sqrt{mg/\kappa}$ 、終端速度に落ち着くまでの典型的タイムスケールは $\sqrt{m/\kappa g}$ である。これらは再び、方程式を解くことなく次元解析からも求められる量である⁴⁸。

スカイダイビングだと、腹ばいの形だと平均的な人間の終端速度は 200km/h \simeq 56m/s ほどだという⁴⁹。重力加速度は 9.8m/s² なので、終端速度に達するまでにかかる時間の典型的な長さは 56/9.8 \simeq 5.6s と見積もれる。大雑把に推定して数秒で終端速度に達するということであり、これは実際のスカイダイビングでの経験値（数秒～10秒で終端速度）と一致している。

[4-1] 粘性抵抗のみの場合 (4.2) と、慣性抵抗のみの場合 (4.8) とで、終端速度が同じだったとする。このとき、両者の場合にもともに初速度ゼロで物体を落下させはじめた場合、同一時刻においてはどちらの場合の方が速度は大きい。「常に～の場合の方が大きい」「最初は～の場合の方が大きい、途中から～の場合の方が大きくなる」「これだけの条件では決められない」のような形で答えよ。

(ヒント：導出した二つの解の式を見比べても、意外と分かりにくいと思う。出発点の方程式の形と、どういことが起きるのかをうまくイメージすることを考えた方が解きやすい。)

4.2 減衰振動

次に、線形バネのポテンシャル中の運動（単振動）を考えよう。任意のポテンシャルにおいて、安定点近傍のポテンシャルは二次ポテンシャルで近似できる。これは、ポテンシャル $U(x)$ の下で $x = x_0$ が安定だとすると、 $x = x_0$ 周りでのテイラー展開は

$$U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3} \Delta x^3 + \dots \quad (4.13)$$

であるが、一次の係数 $\frac{dU}{dx}$ は「安定点である」という仮定によりゼロで、 $O(\Delta x^3)$ は高次項として無視すると

$$U(x_0 + \Delta x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Delta x^2 \quad (4.14)$$

⁴⁵粘性抵抗と慣性抵抗が両方働く場合も、慣性抵抗の場合を解く際のテクニックを用いて解くことができる。

⁴⁶ $D = e^C$ としなかったのは単に最後の解の見栄えをよくするためである。

⁴⁷こうすることで、 D が負の場合と $\frac{a+v}{a-v}$ が負の場合とが対応することになる。

⁴⁸慣性抵抗係数 κ の次元は M/L である

⁴⁹頭を下にして落下すると、空気抵抗は小さくなるので終端速度は大きくなり、300km/h 程度の終端速度まで実現できる。なお、空気が薄くなればその分だけ空気抵抗は小さくなるので、終端速度も大きくなる。落下速度のギネス記録は、高度 40km の成層圏からのダイブによる 1322km/h である。

と位置の二次で近似できるからである。線形バネのポテンシャルの運動（単振動）の解析が出来れば、一般の安定点回りの微小振動の問題に答えることになるため、バネそのものを物理学で扱う機会は多くなくとも、線形バネの系をきちんと調べることは極めて重要である。

テイラー展開をまだ学んでいない人は、これは力についての一次近似だと理解しても構わない。位置 x においてポテンシャルが作る力は $F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$ である。 $x = x_0$ は安定（力がかかっていない）なので、 $F(x_0) = 0$ である。この一次近似は

$$F(x_0 + \Delta x) \simeq F'(x_0)\Delta x = -\left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \Delta x \quad (4.15)$$

という近似であり、この力の形は単振動の式の力の式と同じ形である。ポテンシャルの形で表したいならば、力を位置 x で積分すればよく

$$U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dy F(y) \simeq U(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dy \left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} y = \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \Delta x^2 \quad (4.16)$$

が得られる。

では下図のように、質量 m の粒子が壁にバネ定数 $k > 0$ のバネで繋がれている状況を考えよう。粒子は壁と垂直な方向にのみ動くことができる。

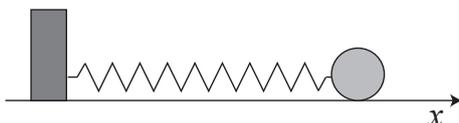


図 9: 粒子質量は m 、バネ定数は k とする。

まず粒子には何も抵抗が働かない状況を考えよう。この場合の粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx \quad (4.17)$$

と書ける。ここで、 x は平衡位置からのずれである。角振動数 $\omega = \sqrt{k/m}$ を導入し、運動方程式を

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega^2 x = 0 \quad (4.18)$$

と書き換えておくと便利である。この微分方程式は、3.3 章で見たように、

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.19)$$

と求まる。

では次に、単振動の系にさらに速度に比例する粘性抵抗が働く状況を考えよう。この場合、運動方程式はその抵抗に関係した正の定数 μ を用いて、

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx - \mu \frac{d}{dt} x \quad (4.20)$$

と書ける。ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{\mu}{2m} \quad (4.21)$$

と置くことにより、運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x + 2\gamma \frac{d}{dt} x + \omega^2 x = 0 \quad (4.22)$$

と書ける。

これは2階の定数係数線形微分方程式なので一般論で解くことができるが、解の定性的振る舞いは ω と γ の大小関係によって異なる。対応する二次方程式は

$$s^2 + 2\gamma s + \omega^2 = 0 \quad (4.23)$$

なので、解の公式に代入して s を求め、それを用いて式(4.22)左辺を因数分解すると

$$\left[\frac{d}{dt} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right] \left[\frac{d}{dt} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right] x(t) = 0 \quad (4.24)$$

となり、 $\gamma \neq \omega$ の場合の一般解は

$$x(t) = C_+ e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} \quad (4.25)$$

と解ける。

この解は ω と γ の大小関係によって、ルートの部分が実数になるか純虚数になるかが変わる。まず $\omega > \gamma$ (抵抗が小さい場合)の運動を考察しよう。このときはルートの中身が負なので、ルートの部分は純虚数になる。よって解(4.25)は

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[A \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) \right] \quad (4.26)$$

と書ける。粒子は、全体としては振動しつつ、その振幅が $e^{-\gamma t}$ の速さで減っていくように振る舞う(図10左)。これを「減衰振動(damped oscillation)」という。

次に $\gamma > \omega$ (抵抗が大きい場合)の運動を考察しよう。このときはルートの中身は正なので、ルートの部分も正の実数で、式(4.25)は二つの指数減衰の足し合わせになる。もっとも遅い減衰速度が長時間における系全体の減衰速度を決めるので、式(4.25)は t が大きい領域では

$$x(t) \simeq C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} \quad (4.27)$$

程度の速さで減衰する。このように、振動せずに減衰が生じる状況を「過減衰(overdamping)」という(図10右)。

最後に、 $\gamma = \omega$ (抵抗と振動が釣り合っている場合)の運動を考察しよう。これは微分方程式の観点でいうと重解が生じている状況である。そのため、解は式(4.25)ではなく、

$$x(t) = (At + B)e^{-\gamma t} \quad (4.28)$$

という形になる。振動減衰と過減衰の境界に当たるこの状況を「臨界減衰(critical damping)」というが、定性的な振る舞いはほぼ過減衰と同一である。 γ (すなわち粘性抵抗 μ)を変化させる状況を考えると、振動しないパラメータ領域の中で最も素早く減衰するのが臨界減衰の状況である。

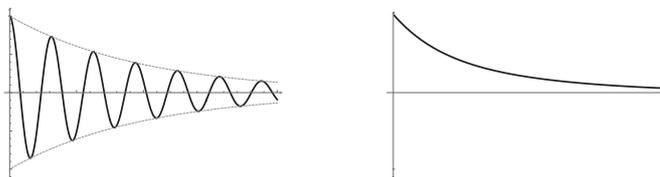


図10: 左: 減衰振動の例。右: 過減衰の例

今回は次元解析をしても、時間の逆数の次元を持つ量として $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と $\gamma = \frac{\mu}{2m}$ の二つがあるので、方程式を解かずに系の挙動を知ることができない。しかし逆にここからは、 ω と γ の大小関係が系の定性的挙動にとっては重要であろうことを推察することができる。特に両極端のケースである $\omega \ll \gamma$ と $\omega \gg \gamma$ を考えると、前者 $\omega \simeq 0$ では系はほぼ指数減衰、後者 $\gamma \simeq 0$ では系はほぼ三角関数に従う単振動であることがすぐに分かるので、この両方の効果が混ざり合うことが方程式を解く前の時点で予想できる。

[4-2] 粘性抵抗を受けた1次元の単振動

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx - \mu \frac{d}{dt} x \quad (4.29)$$

を考える。粘性抵抗が十分小さい状況で、初期条件とその他のパラメータは同一のまま、質量 m を小さくした。このとき、減衰の速さ及び振動の速さはどう変わるか。また、元の条件での $x-t$ のグラフの概形と、質量を小さくした状況での $x-t$ のグラフの概形を重ねて描け。

4.3 強制振動と共鳴

では次に、外部から振動を加えた場合を考えることにしよう。まず、摩擦・抵抗のない単振動に、外部から周期駆動を加えた

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f \sin \Omega t \quad (4.30)$$

の状況を考えよう。ここで ω と f は正の定数とする。このように、外部から振動を加えられている状況を「強制振動 (forced oscillation)」と呼ぶ。

これは定数係数線形非斉次微分方程式なので、特解の一つを見つければよい。まず $\Omega \neq \omega$ の場合を考えよう。この場合、 $x = C \sin \Omega t$ と決め打ちして代入すると

$$-C\Omega^2 \sin \Omega t + C\omega^2 \sin \Omega t = f \sin \Omega t \quad (4.31)$$

が得られるので、 $C = f/(\omega^2 - \Omega^2)$ と分かり、解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (4.32)$$

と二つの振動の足し合わせとなることが分かる (A は任意係数)。

一方、 $\omega = \Omega$ の場合には「共鳴 (resonance)」が生じ、この場合には上記の解は成り立たない。実際、同様に $x = C \sin \omega t$ と決め打ちして代入すると

$$-C\omega^2 \sin \omega t + C\omega^2 \sin \omega t = 0 \neq f \sin \omega t \quad (4.33)$$

となり、どのような C でもこれは解とはならない。これは [3-2] (2) と同様の状況なので、そこで用いたのと同様に多項式をかけた形を解の形として決め打ちする。解の形として $x = Ct \cos \omega t$ と決め打ちする⁵⁰ と

$$-2C\omega \sin \omega t = f \sin \omega t \quad (4.34)$$

となり、 $C = -\frac{f}{2\omega}$ と分かるので、解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) - \frac{f}{2\omega} t \cos \omega t \quad (4.35)$$

となる。十分時間が経つと、 $x(t)$ は振動しながら $x = \pm \frac{f}{2\omega} t$ のように振幅を発散させていく。グラフに書くと同図 11 のようになり、周波数 ω の振動が発散していくことが見て取れる。

このような共鳴現象を利用したものとして、共振回路による電波受信 (ラジオ電波の受信などに用いられる) がある。並列の共振回路の場合には、特定の周波数で共鳴が生じるので、これを受信器として使うことで特定周波数の信号を取り出せる。他にも、高層ビルの共鳴周波数と地震の周波数が揃ってしまったために、弱い地震であるにもかかわらず高層ビルが大きく揺れてしまったり⁵¹、ワイングラスの共鳴周波数に揃った音を出すことで、音だけでワイングラスを割ることが出来たり⁵² と、共鳴現象は色々なところで現れる。

⁵⁰ 左辺の二階微分のうち、 t に一回、三角関数に一回微分が作用したものが残るはずなので、最終的に \sin が出てくるようにここでは \cos を選んでいる。

⁵¹ 「地震と建物の共振 (高層建物・低層建物) 振動模型」 <https://www.youtube.com/watch?v=nxX4KvTa6w&t=26s> で模型による実験動画が見れる。

⁵² 「Breaking Glass with Sound」 <https://www.youtube.com/watch?v=CdUoFIZSuX0> で実験動画が見れる。

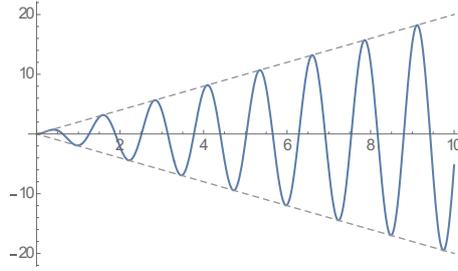


図 11: 共鳴した場合の解 (4.35) の挙動。

では次に、摩擦のある単振動に外部から振動を加える状況を考えよう。運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f \sin \Omega t \quad (4.36)$$

で与えられるとする。ここで γ 、 ω 、 f 、 Ω はすべて正の定数とする。

対応する斉次方程式の解は式 (4.25) と既に求まっているので、非斉次方程式の特解を一つ求めればよい。 $x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$ と決め打ちして代入すると、 \sin と \cos のそれぞれの係数が両辺で等しいため

$$-A\Omega^2 - 2\gamma B\Omega + A\omega^2 = f \quad (4.37)$$

$$-B\Omega^2 + 2\gamma A\Omega + B\omega^2 = 0 \quad (4.38)$$

が満たされる必要がある。これを解いて

$$A = -\frac{(\Omega^2 - \omega^2)f}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos \theta \quad (4.39)$$

$$B = -\frac{2\gamma\Omega f}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin \theta \quad (4.40)$$

と書ける。ただしここで $B < 0$ より $\sin \theta < 0$ の必要があるので、 $-\pi < \theta < 0$ である。 θ は

$$\tan \theta = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (4.41)$$

を満たす $-\pi < \theta < 0$ の範囲の解として定まる。これらを用いると式 (4.36) の解は

$$x(t) = C_+ e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \theta) \quad (4.42)$$

であると分かる。特に一項目と二項目は t が大きいところで速やかにゼロに収束するので、十分時間が経った後の系の時間発展は

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \theta) \quad (4.43)$$

で記述される。つまり、系は最後には必ず外部からの振動と同じ振動数で振動する。ただしここで θ は常に負なので、系の振動は常に外部の振動に対して遅れてついていく状況であると分かる。

摩擦がない単振動の場合は、 $\Omega = \omega$ の共鳴条件下では振幅の発散が生じた。これに対し摩擦がある場合には、 $\Omega = \omega$ の共鳴条件が満たされていても振幅は発散せず、最大値 $f/2\gamma\omega$ をとる。

振動の遅れの度合い θ は、式 (4.41) を見ることで定性的な振る舞いが理解できる。外力の振動数 Ω が固有振動数 ω に比べて非常に小さい場合は、 $\tan \theta$ は負の側からゼロに近づくので、 θ はほとんどゼロである。つまり、外力の振動が非常にゆっくりの場合には、遅れはほとんど生じず、系は外部の振動とほぼ同位相で振動する。反対に、外力の振動数 Ω が固有振動数 ω に比べて非常に大きい場合、 $\tan \theta$ は正の側からゼロに近づくので、 θ はほとんど $-\pi$ である。つまり、外力の振動が非常に速い場合には、系は外部の振動と逆位相で振動する。その中間、共鳴が生じているときには、 $\tan \theta = \infty$ なので、 θ は $-\pi/2$ である。

強制振動の面白い例として、潮の満ち引きについて取り上げよう。潮の満ち引きは月の引力によって生じるということはよく知られている。そのメカニズムを、ここでは簡単なモデリングの下でもう少し考察してみよう。

状況を簡単にするため、地球の表面には陸地はなく一定の水深の海しかないものとし、さらに「地球が自転する」代わりに「月が一日で地球の周りを一周する」という描像を用いることにする（図 12 左）。このような設定の下で、回転する月の及ぼす引力の影響でどのように海の水が動くのかを考える。

潮の満ち引きは一日に 2 回ある。この説明の図としてしばしば見かけるのは、図 12 中央のような絵である。月に面している側は月の引力に引かれて海水が上がる。一方、その真裏の地点でも海水が上がっている。これは、真裏に行けば行くほど月の引力が小さくなる⁵³ ためである。

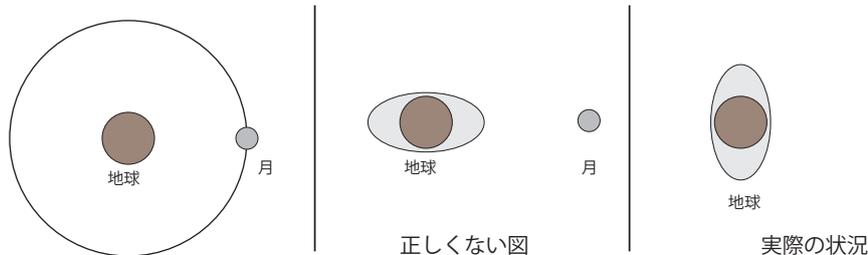


図 12: 左：簡単のため、地球は自転せず、月が一日に一回地球の周りをまわるという描像を用いる。中：しばしば見かけるが正しくない潮汐力のイメージ図。月に面している面の海水は月の引力で引っ張られ、反対側の面の海水は月の引力が弱いことと遠心力により遠くに押しやられる。右：実際の潮汐の状況。よくある図からは 90 度傾いている。

図 12 中央のようになっているとすると、月が真上と真裏にあるときに満潮になる（満月の日ならば、およそ 0 時と 12 時に満潮になる）と予想できる。しかし実際の潮位データ⁵⁴ を見るとそれとは異なる振舞いが見れる。例えば 2022 年 2 月 17 日は満月（24 時に南中）だが、この日の（日本標準時に近く外洋に面する）室戸岬の潮位（図 13）を見ると、満潮時刻は 7:00 と 18:23、干潮時刻は 0:25 と 12:37 と、ほぼ逆位相である。状況を図で描くと図 12 右のような状況である。

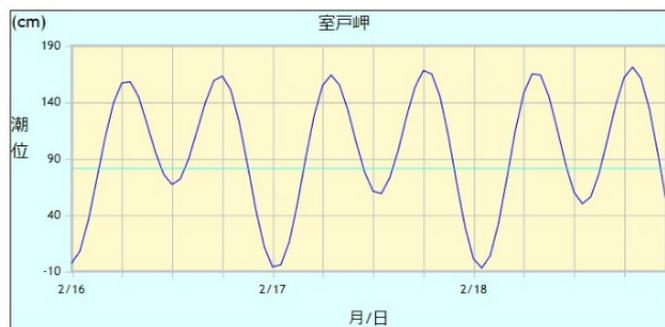


図 13: 2022 年 2 月 17 日（満月）の室戸岬の潮位データ。気象庁の潮位データのページ（<https://www.data.jma.go.jp/kaiyou/db/tide/suisan/suisan.php>）より引用。

この現象は、強制振動の一つとしてよく理解できるものである。月は 12 時間で地球を半周する。これが強制振動の振動数 Ω を定める。一方の固有振動数 ω は、海の水がどれだけの速さで地球上を伝わっていくかによって定まる量だが、これを見積もるには外部からの衝撃によって海面に著しい変化が生じたときに、それがどの程度の速さで遠方に伝わるかを考えるのがよい。典型例は津波で、1960 年チリ地震は日本のほぼ真裏のチリで発生し、地震発生から約 24 時間後に日本に津波が到達した。なので大雑把な見積もりとし

⁵³ より正確には、水に働く力には、月の引力と「月-地球合成系の公転による、地球に働く遠心力（これは月から遠ざける向きに働く）」があり、この二つの合力を考えると、月に近い面では月側に、月に向いてない面では月と逆側に力が働いているためである。なお、この公転は、単純化モデルの公転ではなく、1 か月に一度月が地球の周りを回ることによる公転のことである。月の重さは地球のおよそ $\frac{1}{81}$ なので、月-地球合成系の重心は月と地球の間を 1 : 81 に分けた点であり、地球はその点を 1 か月かけて一周している（重心座標から見た二体の回転運動は 6 章で詳しく解説する）。その回転運動による遠心力のことである。

⁵⁴ 気象庁の潮位データのページ（<https://www.data.jma.go.jp/kaiyou/db/tide/suisan/suisan.php>）から見れる。なお湾内の観測点は湾の形状などの地理的影響を受けやすいので、外洋に直接面している観測点の方が今見たい効果は見やすい。

ては、固有振動に従うと海の水は24時間で地球を半周する。なので月による海の水の強制振動は $\Omega > \omega$ の状況になっており、そのため月の位置に対して海の水は逆位相になっていたのである。

外部から素早い振動を加えることで、不安定な点を安定な点に変えることができる場合がある。その具体例として、振り子を支点の真上にした状況を考えることにしよう(図14)。もちろんこの点はそのままで不安定である。これに外部から強制振動を加えよう。振り子の角を θ とすると、このような系の運動方程式は

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = f(\theta) \sin \Omega t \quad (4.44)$$

という形で書ける。ただしここで $\theta = 0$ は振り子が真下にある状況、 $\theta = \pi$ は振り子が倒立して真上にある状況であり、 l は振り子の長さである。左辺がこのような形になるのは、次のように理解できる。 $l\theta$ が振り子の移動距離であることを考えれば、外力なしの場合の運動方程式は $y = l\theta$ と置いて $m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial U(y)}{\partial y}$ と書けるはずで、これの全体に l を書けると式(4.44)左辺が得られる。

右辺の $f(\theta) \sin \Omega t$ は外部振動による外力を表す項であり、詳細はあとで議論する。 $f(\theta)$ は外部振動の振幅(一般に角度 θ に依存)を与える関数で、振動のさせ方を具体的に定めることで関数 f の具体形が定まる。また、後に見るように、自然な設定では $f(\theta)$ は l の一次の項でもある。これは、全体を l で割る(変数を角度から距離に直す)と、外力の影響は振り子の長さに依存しなくなるということで、これは振り子の視点の振動の大きさは l に依存せず、それに引きずられる形で振り子の先端も振動することを思い出せば自然な帰結である。今は特に、強制振動の振幅 f は小さいが、その振動数 Ω は非常に大きい状況を考えることにしよう。これは「カピッツァ⁵⁵の振り子(Kapitza's Pendulum)」と呼ばれている⁵⁶。

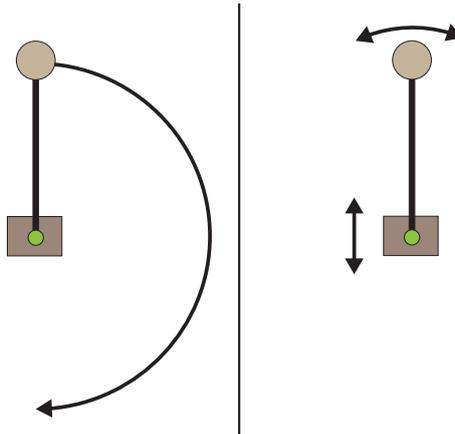


図14: 左: 振り子を倒立させると、通常は不安定で下に回って行ってしまふ。右: 振り子の視点を素早く振動させると、倒立した状態も安定になる。

$\theta(t)$ は、ゆっくりとした平均的な動きの周りで、強制振動による微小な振動をされると考えられる。そこで $\theta(t)$ を、

$$\theta(t) = X(t) + \xi(t) \quad (4.45)$$

と、ゆっくりとした平均的な動き $X(t)$ と、平均ゼロの微小な素早い振動 $\xi(t)$ に分けて解析することを考える。運動方程式(4.44)を展開すると

$$ml^2 \frac{d^2X}{dt^2} + ml^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = - \left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=X} - \xi \left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta=X} + f(X) \sin \Omega t + \xi \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=X} \sin \Omega t + \dots \quad (4.46)$$

と書ける。 $|\xi(t)|$ は微小($|\xi(t)| \ll |X(t)|$)である一方、その微分は Ω という大きな係数を持つ($\frac{d^n \xi(t)}{dt^n} = O(\Omega^n)$)ことをふまえ、微小な速い成分の時間発展の部分だけを取り出すことを考える。この時間レジームでは X は定数とみなせるので、左辺第二項(二階微分で Ω^2 がかかる)と右辺第三項(係数が $O(1)$ かつ早

⁵⁵ピョートル・カピッツァ(Pyotr Kapitza: 1894-1984)はロシアの物理学者。当時のソ連の政権に協力的でなかったために自宅軟禁されていた際、自宅の物置小屋でもできる物理研究の一つとして、このような振動を受けた振り子の研究を行った。

⁵⁶実験の動画が「Kapitza's Pendulum」(<https://www.youtube.com/watch?v=cjGqx79ITI>)で見れる。

い振動) が残り⁵⁷,

$$ml^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = f(X) \sin \Omega t \quad (4.47)$$

となる。これは直ちに解けて、 $\xi(t)$ の時間発展は

$$\xi(t) = -\frac{f(X)}{ml^2 \Omega^2} \sin \Omega t \quad (4.48)$$

となる。

$\xi(t)$ は解けたので、この解を代入すれば式(4.46)は $X(t)$ のみの式となる。 $U(\theta), f(\theta)$ をそれぞれ $U(X), f(X)$ の式としたうえで、微小振動については時間平均をとる。すると $\xi(t)$ の時間平均はゼロ ($\overline{\xi(t)} = 0$) なので左辺第二項、右辺第二項、右辺第三項はすべてゼロとなり、残りについては

$$ml^2 \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{dU}{dX} - \frac{f(X)}{ml^2 \Omega^2} \frac{df}{dX} \overline{\sin^2 \Omega t} = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dX} \quad (4.49)$$

と書ける。ただしここで有効ポテンシャルを

$$U_{\text{eff}}(X) := U(X) + \frac{f(X)^2}{4ml^2 \Omega^2} \quad (4.50)$$

で定義した。また第二項目を導く際、 $\overline{\sin^2 \Omega t} = \frac{1}{2}$ を用いた。有効ポテンシャルの第二項は、微小振動に伴う平均運動エネルギーである。位置 X に依存して微小振動の平均運動エネルギーが変わるので、そのエネルギーの寄与まで組み込んで「ポテンシャル」とみなそう、というのが有効ポテンシャルの考え方である。

さて、長さ l 、支点の振動振幅 a のカピッツァの振り子の設定では、

$$U(\theta) = -mgl \cos \theta \quad (4.51)$$

$$f(\theta) = -ma\Omega^2 \sin \theta \quad (4.52)$$

である(式(4.52)は、その絶対値が θ が 0 および π で小さくなり $\frac{\pi}{2}$ に近づくほど大きくなるような関数であれば、詳細はあまり重要でない。この形になることは、7章でラグランジアンを導入した後に示す)。これを式(4.50)に代入すると

$$U_{\text{eff}}(X) = -mgl \cos X + \frac{ma^2}{4} \Omega^2 \sin^2 X \quad (4.53)$$

となる。振り子が倒立した状況は $X \simeq \pi$ なので、この近傍での安定性を考えることにしよう。 $X = \pi + \Delta X$ として ΔX の二次まで展開すると

$$U_{\text{eff}}(\Delta X) \simeq mgl + \left(-\frac{mgl}{2} + \frac{ma^2}{4} \Omega^2 \right) \Delta X^2 \quad (4.54)$$

なので、

$$a^2 \Omega^2 > 2gl \quad (4.55)$$

の条件が満たされていれば、 ΔX^2 の係数が正となり $\Delta X = 0$ で安定、つまり振り子は倒立した状態で安定になることが分かる。

4.4 <補論> : パラメータ共鳴

前の節では、外部から振動を加えることで不安定な状態を安定な状態にする方法を見た。ここでは逆に、外部からの振動で安定な状態を不安定な状態にする方法を見よう。この状況の物理的な代表例はブランコである。ブランコは、何もしなければ真下にとどまるのが安定解である。しかしブランコをこぐと、真下にとどまるのではなく前後に振動する状況が実現する。これは、もともと安定解だった「ブランコが真下にとどまる」が不安定化したことを意味している。

ここでは、振動外力を加えるのではなく、系の固有振動数そのものが時間とともに変化する状況を考えよ

⁵⁷ 右辺第四項は、 $|\xi| \ll |f(X)|$ なので、 $\xi(t)$ の主要項には効かない。

う。特に、固有振動数自体が振動する状況

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f(t)^2x(t) = 0 \quad (4.56)$$

を考えよう。この運動方程式において、一切振動を行わずに原点にとどまっている状況 $x(t) = 0$ は常に解である。 $x(t) = 0$ から少しずれた際に、そのずれが増幅するかによって、この解の安定性が分かるので、それを調べよう。解析的に取り扱いやすくするため

$$f(t) \begin{cases} \omega_+ := \omega + \varepsilon, & 0 \leq t < \tau \\ \omega_- := \omega - \varepsilon, & \tau \leq t < 2\tau \end{cases} \quad (4.57)$$

であり、 $f(2\tau + t) = f(t)$ という周期性を持つ状況を考える⁵⁸。特に固有振動数の変動幅 ε は小さい状況 ($\varepsilon \ll \omega$) を考える

この場合、各区間ごとに時間発展は厳密に解くことができる。時間幅 τ で離散化して漸化式として書くと、行列を用いた表示で

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin \tau\omega_+ \\ -\omega_+ \sin \tau\omega_+ & \cos \tau\omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

$$\begin{pmatrix} x(2\tau) \\ \dot{x}(2\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_- & \frac{1}{\omega_-} \sin \tau\omega_- \\ -\omega_- \sin \tau\omega_- & \cos \tau\omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

と書ける。二つの行列の積を

$$A := \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin \tau\omega_+ \\ -\omega_+ \sin \tau\omega_+ & \cos \tau\omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_- & \frac{1}{\omega_-} \sin \tau\omega_- \\ -\omega_- \sin \tau\omega_- & \cos \tau\omega_- \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

と書くことにする。すると、 $\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} x(2\tau n) \\ \dot{x}(2\tau n) \end{pmatrix}$ と置くと

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \quad (4.61)$$

である。ここで、適切なベクトル \mathbf{v}_\pm と数 λ_\pm が存在し、 A の作用は

$$\lambda_\pm \mathbf{v}_\pm = A\mathbf{v}_\pm \quad (4.62)$$

と書けるという事実を利用する⁵⁹。これを用いると、初期状態が $\mathbf{x}_0 = c_+\mathbf{v}_+ + c_-\mathbf{v}_-$ と展開出来ていたとすると、一般の n における値は

$$\mathbf{x}_n = c_+(\lambda_+)^n \mathbf{v}_+ + c_-(\lambda_-)^n \mathbf{v}_- \quad (4.63)$$

と書けることが分かる。 λ_\pm (の少なくとも一方) の絶対値が 1 より大きければ、 \mathbf{x}_n は n が大きくなるにつれて安定点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ から離れていき、逆に両方とも絶対値が 1 以下ならば \mathbf{x}_n は離れていかない⁶⁰。そのため、 $|\lambda_\pm|$ が 1 より大きいか否かを調べればよい。

⁵⁸ $f(t)^2$ の代わりに $\omega^2(1+f \sin \Omega t)$ という振動数変化をする場合もよく取り扱われる。この場合はマチウ方程式 (Mathieu equation) と呼ばれる。マチウ方程式のパラメータ共鳴の解析は、例えばランダウ、リフシッツ『力学 (第3版)』§ 27 などに出ている。

⁵⁹ これは線形代数の固有値・固有ベクトルの話である。一般的な話は数学 II で習うはずである。

⁶⁰ 絶対値が真に 1 より小さければ、 $n \rightarrow \infty$ で \mathbf{x}_n は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ に収束し、絶対値が 1 であれば、安定点に近づきも遠ざかりもせずと同程度の距離にとどまる。

固有値 λ_{\pm} は直接計算すると

$$\lambda_{\pm} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} \quad (4.64)$$

$$t = 2 \cos(\omega_+ \tau) \cos(\omega_- \tau) - \left(\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) \sin(\omega_+ \tau) \sin(\omega_- \tau) \quad (4.65)$$

が得られる。 $|\lambda_{\pm}|$ は $|t| > 2$ のときに 1 を上回るの、 $|t| > 2$ となる条件を調べる。 $\varepsilon \ll \omega$ より

$$\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} = 2 + 4 \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^4\right) \simeq 2 + 4 \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \quad (4.66)$$

と近似すると、安定不安定の境界を与える $t = \pm 2$ の条件は

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \cos 2\tau\varepsilon + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) \cos 2\tau\omega = \pm 1 \quad (4.67)$$

となる。ただしここで三角関数の積和の公式を用いた。

まず振動がなくなる極限、 $\varepsilon = 0$ 、の状況を考えて、式 (4.67) は

$$\cos 2\tau\omega = \pm 1 \quad (4.68)$$

となるので、整数 k を用いて

$$\omega = \frac{k\pi}{2\tau}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.69)$$

で与えられる点が安定不安定の境界であることが分かる。よって ε が小さい領域では $\cos 2\tau\omega \simeq \pm 1$ と近似できる。

式 (4.69) の近傍での ε と ω の関係を調べよう。まず式 (4.67) 右辺が +1 の状況を考えよう。 $\omega = \frac{k\pi}{2\tau} + \delta$ とすると、 \cos をテイラー展開して二次までで打ち切ること

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} (1 - 2(\tau\varepsilon)^2) + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) (1 - 2(\tau\delta)^2) \simeq 1 \quad (4.70)$$

が境界の式となる。よって

$$\delta = \pm \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}} \simeq \frac{\tau\varepsilon^2}{k\pi} \quad (4.71)$$

が $\omega = \frac{k\pi}{2\tau}$ 周りの $\varepsilon - \omega$ 平面の境界の広がり方である。

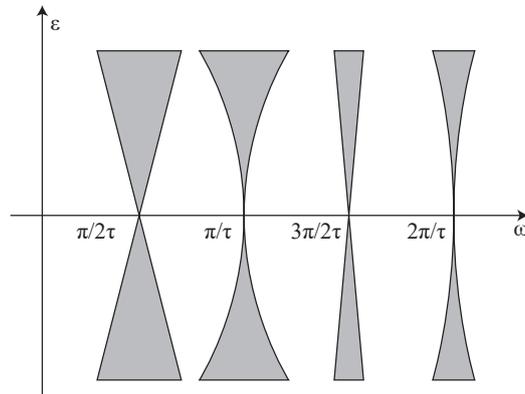


図 15: パラメータ共鳴によって不安定化が生じる領域をグレーで塗ったもの。

同様に式 (4.67) 右辺が -1 の状況では、 $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2\tau} + \delta$ とすると、

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} (1 - 2(\tau\varepsilon)^2) + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) (-1 + 2(\tau\delta)^2) \simeq -1 \quad (4.72)$$

が得られる。 -1 の場合は、 $+1$ の場合と違って、一項目と二項目で $\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$ がキャンセルしないことに注意すると

$$\delta \simeq \pm \frac{\varepsilon}{\tau\omega} = \frac{2\varepsilon}{(2k+1)\pi} \quad (4.73)$$

が $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2\tau}$ 周りの $\varepsilon - \omega$ 平面の境界の広がり方である。

得られた結果をまとめると図 15 のようになる。境界は、奇数番目の点の周りは線形に、偶数番目の点の周りはルートに従う。また、 ω が大きくなるほど不安定化が生じる領域の幅は狭まっていく。

5 中心力

5.1 問題設定と極座標表示

この章では、原点を中心とする中心力 (central force) の下での質点の運動を取り扱う⁶¹。中心力とは、力の向きがどの場所においても原点を向いているような力のことである⁶²。働く力が中心力の場合、原点を基準点とした角運動量保存則が成り立つことが直ちにわかる。

原点と、質点及びそこを始点とする速度ベクトルをともに含むような平面を考えると、質点は時間発展しても常にその平面中にあることが分かる (その平面に垂直な速度ベクトルは常にゼロなので)。そのため、中心力の問題は、実際の空間次元が何次元であったとしても、二次元空間中の問題として取り扱うことができる。以下では、位置座標は二次元平面中の点 $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 、あるいは極座標表示して $\mathbf{r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ で指定する (やや紛らわしいが、このテキストでは、太字の \mathbf{r} は位置を、太字でない r は原点からの距離を表すことにする)。

この章では、まず一般の中心力の下での運動を解析したのちに、太陽の万有引力 (逆二乗則) に従う惑星の運動を解析する。ここで、太陽の位置は一点には固定されておらず、太陽もまた万有引力の反作用に従って運動していることを気にする人もいるかもしれない。しかし太陽の運動を考慮したとしても、重心座標系に移って考える (詳細は次の章で説明する) ことにより、太陽が動く場合の惑星の運動を知るには、固定された一点からの中心力を受けた質点の運動が解析できていれば十分であることが後に明らかになる⁶³。そのため本章では、原点向きの中心力の場合のみを考察する。

中心力の場合、 (x, y) を用いた直交座標よりも、 (r, θ) を用いた極座標の方が便利である。しかし運動方程式 (1.2) は直交座標に対して定義されているので、まずこれを極座標に変換する。

位置が $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で表されるというのは、 x 方向、 y 方向への単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ とすると、 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ であるということと等価である。これを極座標にするために、単位ベクトルとして $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ の代わりに、動径方向のベクトル \mathbf{e}_r と、回転方向のベクトル \mathbf{e}_θ を導入する (図 16)。そうすると質点の位置は $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ と表せる。直交座標の場合の単位ベクトルとの大きな違いは、単位ベクトル自身が質点の位置によって変化する点である。質点の回転速度が $\dot{\theta}$ のとき、単位ベクトルの長さは 1 なので、二つの単位ベクトルはそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \quad (5.2)$$

と変化する。これを用いると、速度ベクトルは

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (5.3)$$

と書けることが分かる。もう一度時間微分することで、加速度ベクトルは

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}\right) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (5.4)$$

と書けることが分かる。

⁶¹本章の基本的な内容は、どの力学の教科書にも出ているはずである。ややアドバンストな部分については、ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学 (上) 原著第 3 版』吉岡書店を主に参考にした。

⁶²ポテンシャル力の場合には、力が常に原点向きであるためには、力の大きさは原点からの距離にのみ依存し、角度には依存しない必要があることが導ける。

⁶³太陽を始点とする太陽の速度ベクトルと、惑星を始点とする惑星の速度ベクトルとがねじれの位置の関係にあり、共通の平面が見るととれないような場合も、重心座標系に移るとそのような平面が常にとれることが示せる。

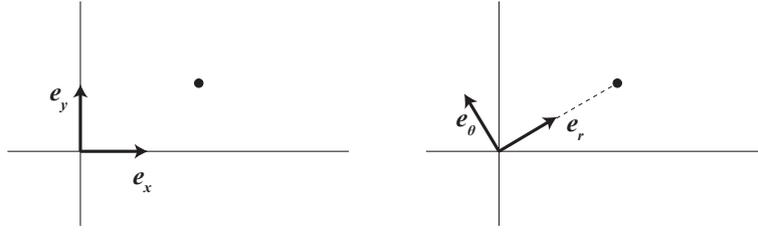


図 16: (左) xy 座標系の単位ベクトル。(右) 動径方向と回転方向に単位ベクトルをとった場合。

今は中心力場なので、働く力は e_r に沿った向きである。よって e_r, e_θ の方向の運動方程式 (1.2) は、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad (5.5)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (5.6)$$

とそれぞれ書ける。下の式は $mr^2\dot{\theta} = \text{const}$ (時間によらない) と同じで、角運動量保存則を与えるものである。全角運動量を L と書くことにすると、 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ なので、これを式 (5.5) に代入すると、

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right] \quad (5.7)$$

という、 r についての閉じた微分方程式になる。これは、ポテンシャルが $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ である場合の一次元運動と完全に同じ形をしている。

式 (5.7) の両辺に \dot{r} を掛けて t で積分することにより、

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const} \quad (5.8)$$

を得る。ただし E は時間に依存しない定数である。これはこの系におけるエネルギー保存則の式そのものである。ポテンシャルが等方的な場合には、 $U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ を右辺に移項して、 $\frac{m}{2}$ で割ったうえでルートをとることで

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2} \right)}} \quad (5.9)$$

が得られる。両辺を積分することで形式解が得られる (右辺の積分が実効出来たら、あとは r を t の式として解けばよい)。ただし一般にはこの積分は解けない。

さて、我々が知りたいのは各時刻における質点 (惑星) の位置ではなく、質点の描く軌道である場合も多い。軌道を知りたい場合には、 r を t の式としてではなく θ の式として表す必要がある。これをするには、角運動量保存則 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ より、時間微分の演算子が

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \quad (5.10)$$

と表せることを利用する。式 (5.7) の左辺にこの表示を代入すると、 $r(\theta)$ に対する方程式

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} \quad (5.11)$$

が得られる。さらに $r = \frac{1}{u}$ という変数変換を行うと、 $\frac{d}{dr} = -u^2 \frac{d}{du}$ が成り立つので、上の方程式は

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{d}{du} U\left(\frac{1}{u}\right) = 0 \quad (5.12)$$

が得られる。この方程式が解ければ、軌道が得られることになる。

5.2 一般のポテンシャルの場合の軌道の性質

以下では、角運動量 L が固定されている状況で、質点がどのような運動を行うのかを定性的に考察する。角運動量が与えられているという設定は、初期位置を決めた際に、角運動量が与えられた値 L になるように初期速度を定めていることに対応する。

この設定で運動を解析するには、縦軸に有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ 、横軸に位置 r をとったグラフを用いるのが分かりやすい。例えば逆二乗則のポテンシャル $U(r) = -\frac{a}{r}$ の場合、グラフは図 17 のようになる⁶⁴。もともとのポテンシャル $U(r)$ は原点 ($r = 0$) に近づくほどエネルギーが下がるにもかかわらず、有効ポテンシャルは原点に近づくほどエネルギーが上がるのは、角運動量を L にするために原点に近づくほど速度が大きくなり、その運動エネルギーの寄与が有効ポテンシャルにはくりこまれてきているためである。質点のエネルギーは

$$(\text{全体のエネルギー}) = (\text{動径方向の運動エネルギー}) + (\text{回転方向の運動エネルギー}) + (\text{質点のポテンシャルエネルギー})$$

と書けるが、このうち後ろ二つ「(回転方向の運動エネルギー) + (質点のポテンシャルエネルギー)」が「有効ポテンシャルのエネルギー」として表されている。

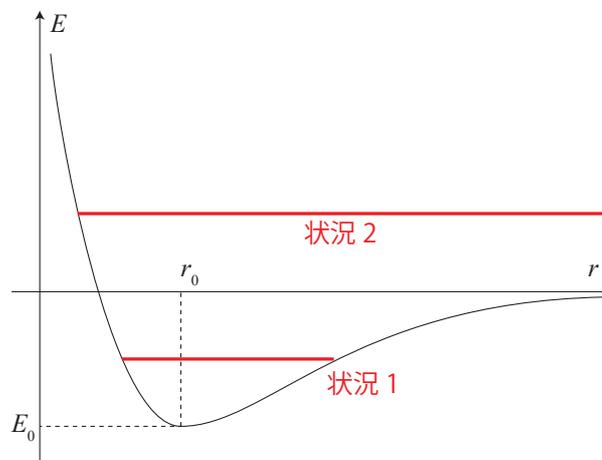


図 17: $U(r) = -\frac{k}{r}$ の場合の有効ポテンシャルによる記述。この有効ポテンシャルは「(回転方向の運動エネルギー) + (質点のポテンシャルエネルギー)」であり、運動エネルギーも一部含まれている点に注意。

では、グラフの概形が図 17 の場合の、エネルギーごとの質点の運動を考察しよう。有効ポテンシャルは少なくとも E_0 以上の値をとり、運動エネルギーは非負なので、これより低いエネルギーをとることはない。 E_0 の値とその際の r_0 は、極値条件

$$\frac{dU(r)}{dr} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \quad (5.13)$$

を解くことで得られる。エネルギー E_0 においては、動径方向には速度を持たず、質点は距離 r_0 で円運動をする。

エネルギーが $E_0 < E < 0$ のとき (図 17 の状況 1) は、図 18 のようにとりうる r の値には上限と下限があり、 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ の範囲に r はとどまる。よく知る惑星の楕円軌道はこの場合に相当する。 $r = r_{\min}$ となる点を近点 (periapsis) あるいは (惑星の場合は) 近日点 (perihelion)、 $r = r_{\max}$ となる点を遠点 (apoapsis) あるいは (惑星の場合は) 遠日点 (aphelion) という⁶⁵。

エネルギーが $0 \leq E$ のとき (図 17 の状況 2) は、質点は最終的に無限遠方に飛び去っていく。このときの軌道は図 19 のようになる。

[5-1] $U(r) = -\frac{k}{r^4}$ の場合に、同様の有効ポテンシャルのグラフを描き、エネルギーごとにどのような軌道が存在するか示せ。

⁶⁴当然だが、ポテンシャル $U(r)$ が変われば一般に有効ポテンシャルの概形も図 17 とは異なるものになる。

⁶⁵惑星の周りをまわる衛星について議論する際は、惑星が地球、木星、土星の場合はそれぞれ近地点、近木点、近土点のように呼ぶこともあるらしい。

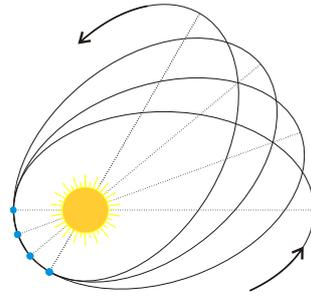


図 18: 近日点移動が生じる場合の模式図。画像は Wikipedia 「Apsidal precession」 より引用。

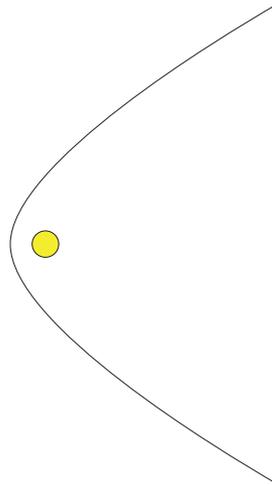


図 19: $0 \leq E$ の場合の軌道の概形。無限遠方から飛来し、太陽のそばには 1 回だけ接近し、その後は無限遠方に飛び去っていく。

次に軌道の性質について見ておこう。一般には軌道は閉じず、近日点の位置は太陽の周りを一周するごとに動いていく (図 18)。これを近日点移動 (Apsidal precession) という。逆二乗則 (万有引力) の場合には軌道は必ず楕円軌道となり軌道は任意の初期状態に対して閉じるが、これは極めて例外的な性質である。

近日点移動の大きさがどれくらいかは、近日点から遠日点まで惑星が動く間に、どれだけの角度回転するかを計算すれば求められる。ポテンシャルが等方的な場合、式 (5.9) に角運動量保存則 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ をかけて積分することで、近日点から遠日点に動くまでの間に

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2} U(r) - \frac{1}{r^2}}} = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2} U\left(\frac{1}{u}\right) - u^2}} \quad (5.14)$$

だけ回転することが分かる。ただし $u = \frac{1}{r}$ 、 $u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}}$ 、 $u_{\min} = \frac{1}{r_{\max}}$ である。この積分は一般には解けず⁶⁶、また π の有理数倍にもならない。後者の事実、軌道が閉じないことを意味している。すべての初期状態において、無限遠に飛び去らないすべての軌道が閉じるような等方的ポテンシャル $U(r)$ は、対応する力が逆二乗則 ($U(r) = -\frac{k}{r}$) とフック則 (Hooke's law : $U(r) = kr^2$) の二つの場合に限られることが証明されている。これは「ベルトランの定理 (Bertrand's theorem)」と呼ばれている (導出は 5.5 節の補論にて行う)。

5.3 逆二乗則の場合の軌道と周期

では、力が逆二乗則に従う場合 ($U(r) = -\frac{k}{r}$) の軌道を求めよう。これは万有引力に従う惑星の運動に対応しており、ケプラー問題 (Kepler problem) と呼ばれる⁶⁷。軌道を与える微分方程式 (5.12) に、 $U(r) = -\frac{k}{r}$

⁶⁶ $U(r) = ar^{n+1}$ の形 (力が r^n に比例) を考えると、この積分の結果が三角関数で表せるのは $n = 1, -2, -3$ の場合、楕円関数で表せるのは $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ の場合である (ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学 (上) 原著第 3 版』吉岡書店 3.5 章参照)。

⁶⁷ これはケプラーが惑星の軌道が太陽を一方の焦点とする楕円軌道であることを導いたことから名づけられている。ただし歴史的な順番は、まずティコ・ブラーエ (Tycho Brahe) の観測データをもとに、ケプラーが惑星の運動は楕円軌道であることを見出し、その

を代入すると

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{km}{L^2} = 0 \quad (5.15)$$

という、 u についての定数係数線形非斉次微分方程式が得られる。これは簡単に解けて

$$u(\theta) = A \cos \theta + \frac{km}{L^2} \quad (5.16)$$

と分かる。ただし A は任意定数である。また今はどの向きを $\theta = 0$ にとるかの任意性があるので、一般解 $A \cos(\theta + \theta_0)$ の θ_0 がゼロになるように向きをとった。 $u = \frac{1}{r}$ であることを思い出すと、これは

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos \theta + B} \quad (5.17)$$

という軌道（円錐曲線）であることが分かる。なお、式 (5.17) は

$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos \theta) \quad (5.18)$$

の形で書くことも多く、 $e = \frac{A}{B}$ はこの円錐曲線の「離心率 (eccentricity)」と呼ばれる量である。

円錐曲線の一般論により、式 (5.17) は楕円軌道（と放物線、双曲線）であることが分かっている。その事実を確認しておこう。楕円は「二つの焦点からの距離の和が一定値であるような点の軌跡」である。原点以外の焦点の座標を $(-a, 0)$ 、二つの焦点からの距離の和を $l > a$ とする。すると、余弦定理を用いることにより、点 $\mathbf{r} = (r, \theta)$ がこの楕円状の点であることは

$$r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta = (l - r)^2 \quad (5.19)$$

を満たすことと等価である（図 20）。右辺を展開して整理すると

$$r = \frac{l^2 - a^2}{2(a \cos \theta + l)} \quad (5.20)$$

となり、式 (5.17) で $A = 2a/(l^2 - a^2)$ 、 $B = 2l/(l^2 - a^2)$ とした場合と一致する。よって逆二乗則の力に従う質点の軌道は楕円軌道であることが確認できた⁶⁸。なお、離心率を用いて表すと $e = 0$ が円、 $0 < e < 1$ が楕円、 $e = 1$ が放物線、 $e > 1$ は双曲線である。惑星の運動が太陽を一方の焦点とする楕円軌道であるという上記の事実は、ケプラーの第一法則として知られている。

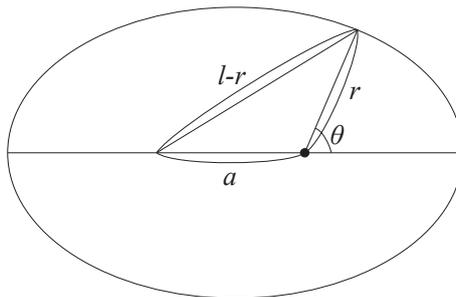


図 20: 一方の焦点（黒丸）が原点、もう一方の焦点が $(-a, 0)$ 、長さ l の楕円。

[5-2] 太陽が原点に固定されている二次元平面中の、質量 m の惑星の運動を考える。惑星は太陽からの引力ポテンシャル $U(r) = -\frac{k}{r}$ ($k > 0$) を受ける。

後にそれを元にニュートンが万有引力の逆二乗則を見つけた、というものである。そのためニュートンが解いた問題は、このテキストで解説しているような「逆二乗則から楕円軌道を導出する」ではなく、その逆である「楕円軌道から力の形が逆二乗則であることを導く」である。このあたりの歴史的な話やニュートン自身の迎った議論については、山本義隆『古典力学の形成』日本評論社に詳しい。

⁶⁸なお、双曲線は「二つの焦点からの距離の差が一定である軌道」だが、これは距離の差を $l < a$ とすると

$$r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta = (l + r)^2 \quad (5.21)$$

と等価であり、同様の変形により式 (5.17) で $A = -2a/(a^2 - l^2)$ 、 $B = 2l/(a^2 - l^2)$ とした場合と一致する。結局、任意定数 A が正の場合が楕円、負の場合が双曲線である。

惑星が無限遠方で速さ v を持ち、太陽の方に接近してきた。惑星は、最も近づいたときに太陽まで距離 l の地点に達し、その後無限遠方へと飛び去って行った。「接近前の無限遠方での惑星の位置」－「太陽」－「飛び去った後の無限遠方での惑星の位置」のなす角度 ϕ ($0 \leq \phi \leq \pi$) を、 v, l, m, k を用いて表せ。

ここまで逆二乗則の力の下での軌道について考察してきた。以下では、運動にかかる時間について考察しよう。

惑星が楕円を一周するのにかかる時間を周期 (period) という。逆二乗則における惑星の周期 τ の二乗は、その楕円軌道の長軸の三乗に比例する。これをケプラーの第三法則という⁶⁹。

楕円軌道の式 (5.17) を出発点に、ケプラーの第三法則を導こう。この楕円軌道の長軸 $d_1 = l$ 、焦点距離 a 、短軸 d_2 はそれぞれ

$$d_1 = \frac{1}{B+A} + \frac{1}{B-A} = \frac{2B}{B^2 - A^2} \quad (5.22)$$

$$a = \frac{1}{B-A} - \frac{1}{B+A} = \frac{2A}{B^2 - A^2} \quad (5.23)$$

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 - a^2} = \frac{2}{\sqrt{B^2 - A^2}} \quad (5.24)$$

と書ける (図 21)。周期 τ は、この楕円の面積 S を角速度の半分⁷⁰ $L/2m$ で割ったものに等しい。 $B = \frac{km}{L^2}$ であることを思い出すと、周期 τ の二乗は

$$\tau^2 = \frac{4mB}{k} \cdot S^2 = \frac{4mB}{k} \cdot \left(\pi \frac{d_1 d_2}{2} \right)^2 = \frac{m}{k} \frac{4\pi^2 B^3}{(B^2 - A^2)^3} = \frac{\pi^2 m}{2k} d_1^3 \quad (5.25)$$

となり、周期の二乗は確かに長軸の三乗に比例している。特に万有引力の場合は、 G を万有引力定数、 M を太陽の質量として $k = GmM$ なので、比例定数は太陽質量のみに依存し惑星の詳細に一切よらない定数となる⁷¹。

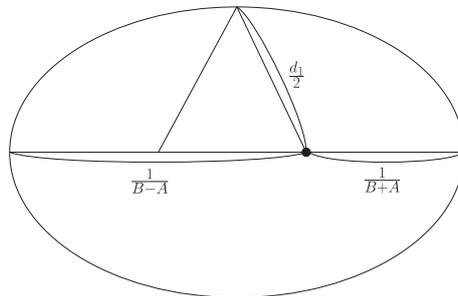


図 21: 式 (5.17) から長さを入れていく。

周期の二乗が何らかの長さスケールの三乗に比例することは、次元解析だけから見出すことができる。逆二乗則の運動を規定する唯一のパラメータは GM である⁷² が、この次元は L^3/T^2 である (この L は角運動量ではなくて長さの次元)。そのため、時間の次元を持つ周期 τ の二乗は、長さの次元を持つ量の三乗と結びつく必要がある。ただし、楕円を特徴づける長さは長軸と短軸の二つがあるので、この二つの 3 次の関数であることは分かるが、長軸の長さのみに依存し短軸の長さには依存しないことまでは次元解析ではわからない。

具体例として、ハレー彗星 (Halley's comet) がどの程度遠くまで行くのかを見積ろう。ハレー彗星の周期は 75.3 年である。ケプラーの第三法則により、長軸の三乗が周期の二乗に比例する。地球の軌道の長軸は 2au (天文単位: 地球と太陽の距離を 1au と定義)、周期は 1 年なので、ハレー彗星の長軸は

$$2\text{au} \cdot (75.3)^{2/3} = 35.66 \dots \text{au} \quad (5.26)$$

⁶⁹ なお、ケプラーの第二法則は角運動量保存則である。

⁷⁰ 単位時間にはく扇形の面積は $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|/2$ なので。

⁷¹ 太陽の運動も考慮したうえで重心座標から運動を記述している場合には、質量 m は換算質量 $\mu = \frac{mM}{m+M}$ に置き換えられるので、比例係数は惑星の質量にも依存する。ただし太陽質量 M が惑星質量 m に比べて十分重ければ、この依存性は実質的に無視できる。

⁷² 惑星の質量 m は、運動方程式のすべての項にかかっているので落とした。

と計算できる。ハレー彗星の近日点は地球の軌道よりも内側にまで入るので、長軸の長さを実質的に「太陽からの最遠距離」とみなしてよい。なので、ハレー彗星は地球-太陽の距離の35倍ほど遠く、海王星よりも外側⁷³まで行くと予想できる。これは、実際のハレー彗星の遠日点距離35.082auを非常によく予想している⁷⁴。

5.4 逆二乗則の静的な性質

これまで、逆二乗則の中心力に従う質点の運動を議論してきた。最後に、三次元空間中の逆二乗則そのものが持つ重要な性質に触れておこう。

これまで惑星や太陽は質点であるように扱ってきたが、もちろん実際には大きさがある。なので、これまでの結果は有限の大きさを考慮すると、近似的にのみ成り立つと期待するのはもっともである。ところが、実は惑星や太陽が球対称であるのならば、「星が有限の大きさを持つ場合」と「星の質量が中心一点に集中している場合」とで、生じる万有引力は全く同じであることが示せる。言い換えると、惑星や太陽の球対称性が満たされる限り、質点近似を行わなくてもこれまでの結果は厳密に成り立つということである⁷⁵。

原点を中心とした半径 d の球殻上に、一様密度 ρ で物体が広がっている状況を考える。この物体の質量は $M = 4\pi d^2 \rho$ である。この球殻が、原点からの距離 $\ell > d$ の質量 m の質点に作る万有引力のポテンシャルを求めよう。

対称性より、質点は z 軸上にあるとして一般性を失わない。三次元極座標を用いて球殻上の積分を実行する。 z 軸からの角度が $[\theta, \theta + d\theta]$ である球面上の領域の面積は $2\pi d^2 \sin \theta d\theta$ なので、この質点のポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U(\ell) &= \int_0^\pi d\theta 2\pi d^2 \sin \theta \frac{Gm\rho}{\sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \theta}} \\ &= 2\pi d^2 Gm\rho \left[\frac{1}{d\ell} \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \theta} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2\pi d^2 Gm\rho}{d\ell} [(\ell + d) - (\ell - d)] \\ &= \frac{GMm}{\ell} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となり、原点に質量 M の質点がある場合の万有引力のポテンシャルと一致する。

なお、球殻内 ($\ell < d$) の万有引力のポテンシャルエネルギーは、同様の計算により

$$U(\ell) = \frac{2\pi d^2 Gm\rho}{d\ell} [(\ell + d) - (d - \ell)] = \frac{GMm}{d} \quad (5.28)$$

となり、 ℓ に依存しない、すなわち球殻内部では球殻上の物質が作る万有引力は全て互いにキャンセルしてゼロ（何も物質がないのと同じ状況）になることが示せる⁷⁶。これらの性質は、万有引力だけでなく電磁気学のクーロン力についても同様に成り立つ。

5.5 <補論>：ベルトランの定理の導出

本編で証明を飛ばした、「すべての有界な軌道が閉軌道となる等方的な中心力ポテンシャルは、 $U(r) = -\frac{k}{r}$ と $U(r) = kr^2$ に限られる」というベルトランの定理の導出を与えよう⁷⁷。

有効ポテンシャルを用いた記述を出発点にする。軌道が円軌道を描く $r = r^*$ は、有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ の微分がゼロ、すなわち

$$U'(r^*) - \frac{L^2}{mr^{*3}} = 0 \quad (5.29)$$

⁷³海王星の近日点距離は29.886au、遠日点距離は30.216auである。ちなみに準惑星の冥王星はやや離心率が大きく、近日点距離は29.574au、遠日点距離は49.316auである。

⁷⁴ずれの理由は近日点距離を無視したからである。ハレー彗星の近日点距離は0.586auで、この二つを足すと予想された長軸距離35.666auにほとんど一致する。

⁷⁵もちろん実際の星は正確に球対称ではないため、この仮定は完全には満たされない（例えば地球は赤道方向に膨らんでいる）。

⁷⁶SF小説でしばしば「地球の真ん中は実は巨大な空洞の空間になっている」という設定があるが、そのままだと空洞中では（近場の球殻部分に向けて重力が働くのではなく）無重力空間になってしまい、空洞世界で通常の生活を営むことはできない（空洞世界にも地表のように人々が生活している、のような描写にしたい場合は、追加の設定が必要である）。

⁷⁷ここでの導出は、アーノルド『古典力学の数学的方法』岩波書店の演習形式の導出の行間を埋めつつ適宜改変したものである。ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学（上）』原著第2版、吉岡書店の付録には、これとは異なる導出が出ている（現在購入可能な第3版にはこの付録は掲載されていないので注意！）。

を満たす。初期状態として、 $r = r^*$ から少しだけずらした状態 $r = r^* + \varepsilon$ をとる状況を考えよう。すると r の方程式は、 $r - r^*$ が微小な領域ではポテンシャルを二次まで展開することで単振動とみなすことができる。特にその振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left(U''(r^*) + \frac{3L^2}{mr^{*4}} \right)} \quad (5.30)$$

と書けるので、半周期 (r_{\min} から r_{\max} までの運動) にかかる時間は $T = \frac{\pi}{\omega}$ と求まる。軌道が半径 r^* の円の場合、単位時間あたりに角度は L/mr^{*2} だけ進むので、半周期の間に角度は

$$\theta = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{L}{mr^{*2}} = \frac{\pi L}{mr^{*2} \sqrt{\frac{1}{m} \left(U''(r^*) + \frac{3L^2}{mr^{*4}} \right)}} = \sqrt{\frac{\pi^2 U'(r^*)}{r^* \left(U''(r^*) + \frac{3U'(r^*)}{r^*} \right)}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{r^* \frac{U''(r^*)}{U'(r^*)} + 3}} \quad (5.31)$$

だけ進む。ただし三つ目の等号では、式 (5.29) を用いて L を消去した。

さて、軌道が円軌道であることを保つように r^* (と L) を連続的に変えていく状況を考えよう⁷⁸。このとき θ は r^* の関数であるが、もし θ が値を連続的に変えるのであれば、ある r^* で θ の値は必ず 2π と無理数比の関係になる⁷⁹。この場合軌道は閉じなくなるので、任意の初期条件で軌道が閉じるという条件を満たせなくなる。よって θ は r^* によらない定数でないといけなことが分かる。つまり、ある定数 a を用いて

$$r^* \frac{U''(r^*)}{U'(r^*)} = a - 1 = \text{const} \quad (5.32)$$

が任意の r^* で成り立たないといけなということである。定数項に -1 がついているのは、ポテンシャルの形をきれいにするためである。

ここで得られたポテンシャル $U(r)$ に対する制限は、円軌道となる場合 ($r = r^*$) に限らず、任意の形の軌道で成り立つ。そのため以下 r^* と書いていたものを改めて r と書く。この微分方程式 (5.32) は変数分離法で解ける。 $U'(r) = -F(r)$ と置くと

$$\frac{dF}{F} = (a - 1) \frac{dr}{r} \quad (5.33)$$

であり、これを積分することで

$$F(r) = br^{a-1} \quad (5.34)$$

を得る。ポテンシャルの形で表すと、適当な係数 k を用いて

$$U(r) = \begin{cases} kr^a & a \neq 0 \\ k \ln r & a = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

となることが分かる。ただし $a \geq 0$ で $k > 0$ 、 $a < 0$ で $k < 0$ である。このとき、半周期で進む角度は

$$\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a+2}} \quad (5.36)$$

である。ここから $a > -2$ と分かる。「すべての軌道が閉じる」という条件がもし満たされているのなら、軌道を連続変形していても θ は変化しない。なぜなら、もし値が変化するのでしたら、 θ の変化の連続性により、変形の途中でどこかの軌道では必ず π の無理数倍の θ をとることとなり、仮定に矛盾するからである。よって円軌道に近いとは限らないすべての軌道について、半周期で進む角度は式 (5.36) であることが分かる。

一般の軌道において半周期の間に進む角度は、すでに式 (5.14) で導いている。特に $E = U(1/u_{\max}) +$

⁷⁸ 元々の考え方は、まず角運動量 L が与えられ、そこから円軌道の半径 r^* が得られるという順番であった。だがここでは逆に、まず円軌道の半径 r^* を定め、そこから角運動量 L を得るという順番で考えている。

⁷⁹ ω や θ がポテンシャルの二次までの打ち切りという近似的な方法で導出しているのに、ここでは有理数比か無理数比かという完璧な精度が必要な議論をしている点が気になる人もいるかもしれない。しかし、この点は問題を生じさせない。なぜなら、この議論で重要なのは「 θ は r^* の関数として書けるが、その値が変化してはいけない」という点だけだからである。 θ が定数関数と分かれば、あとは $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとれば、本編の議論に戻る。

$L^2 u_{\max}^2 / 2m$ が成り立つ。代入して整理すると

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{U\left(\frac{1}{u_{\max}}\right) + \frac{L^2 u_{\max}^2}{2m} - U\left(\frac{1}{u}\right) - \frac{L^2 u^2}{2m}}} \quad (5.37)$$

が得られる。以降は、ポテンシャルの a の値で場合分けし、計算しやすい（極限的な）状況設定で θ を計算し、式 (5.36) との整合性を検討することで、すべての軌道が閉じるような a の値を導く⁸⁰。

まず $a \geq 0$ の場合を求めよう。式 (5.37) を出発点に、 $u = yu_{\max}$ と置換し、 $u_{\max} \rightarrow \infty$ の極限をとる。この極限は $E \rightarrow \infty$ の状況に対応する。すると積分は

$$\theta = \lim_{u_{\max} \rightarrow \infty} \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{u_{\max}^{a+2}} + \frac{L^2}{2m} - \frac{k}{u_{\max}^{a+2} y^a} - \frac{L^2 y^2}{2m}}} \quad (5.38)$$

となる。ルートの中の第一項はこの極限で明らかにゼロになる。注意が必要なのは三項目である。 $y = O(1)$ の場合には、この項は $u_{\max} \rightarrow \infty$ の極限でゼロになり無視してよい。だが $y_{\min} \sim u_{\max}^{-2/a-1}$ であり、特に $y = y_{\min}$ においてはこの項は第二項と等オーダーの量になり、ルートの中身は発散するが積分は収束するという広義積分の状況である。そのためこの項の寄与が無視できるかは自明でないが、発散の仕方を評価する⁸¹ と、 u_{\max} が大きくなるにつれて広義積分の幅がどんどん狭くなり、 $u_{\max} \rightarrow \infty$ の極限で広義積分の値がゼロになる。そのため結局式 (5.38) の積分は

$$\theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (5.41)$$

と解ける。ただし途中の積分では $y = \sin x$ と変数変換した。式 (5.36) とこの値を比較することで、 $a = 2$ のみがこの条件を満たすことが分かる。

次に $0 > a > -2$ の場合を考えよう。今度は式 (5.14) まで戻って考える。 $u_{\min} \rightarrow 0$ 、 $E \rightarrow -0$ の極限をとると、ルートの中の第一項は消える。また $E = 0$ のとき、 $u_{\max} = (2mk/L^2)^{1/(2+a)}$ である。そのため、式 (5.37) で先程と同様に $u = yu_{\max}$ と置換すると

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{u_{\max}^{a+2} y^a} - \frac{L^2 y^2}{2m}}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-a} - y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{-a/2} \sqrt{1-y^{2+a}}} = \frac{2}{2+a} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2+a} \quad (5.42)$$

となる。ただし最後の積分では $z = y^{1+a/2}$ と変数変換した。式 (5.36) とこの値を比較することで、 $2+a = 1$ 、すなわち $a = -1$ のみがこの条件を満たすことが分かる。

そして $a = 2$ 及び $a = -1$ の場合の軌道を解くと、これらの場合にはすべての軌道が閉じることが直接確認できる。以上より、すべての有界な軌道が閉じる等方的なポテンシャルは、 $U(r) = -\frac{k}{r}$ と $U(r) = kr^2$ の二通りしかないことが示された。

5.6 <補論>：ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル

我々は既に、逆二乗則の場合にはすべての軌道が閉じること、これは極めて例外的な現象で一般には近日点移動が生じること、を見た。近日点移動が生じないことは、実は保存量の存在として示すことができる。

⁸⁰円軌道の場合の θ の式 (5.36)、及び極限的な状況で計算した θ の式 (5.37) は、どちらも軌道が閉じるかどうかにかかわらず正しい θ の式である。「すべての軌道が閉じる」という仮定を置くと、この二つの θ が一致しないといけないう性質が導ける。ここから a が特定の値でないといけないうことを導いている。（その他の a の場合には、 θ の値は軌道変形によって連続的に式 (5.36) から式 (5.37) へと変化していく）

⁸¹この積分は、

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \int_{1/C}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{1}{Cy}}} \quad (5.39)$$

と本質的には同じ形の広義積分である。 $t = 1 - \frac{1}{Cy}$ と変数変換すると、この積分は

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \int_0^{1-1/C} \frac{dt}{C(1-t)^2 \sqrt{t}} \quad (5.40)$$

であり、 $t \simeq 0$ における積分の寄与は $\frac{1}{C}$ で小さくなっていくので、 $C \rightarrow \infty$ の極限では無視できる寄与しか持たないことが分かる。

運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.43)$$

で与えられ、エネルギーと角運動量

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.45)$$

が保存する。変数は $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$ の6つなので、これら（エネルギー保存則+3方向の角運動量保存則）に加えてもう一つ保存則が見つければ、運動が完全に指定される。そして、これら以外にも一つ、「ラプラス・ランゲ・レンツベクトル（Laplace-Runge-Lenz vector）」

$$\mathbf{A} := b\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.46)$$

も実は保存量となる⁸²。ただしここで $b = 1/km$ である。

\mathbf{A} が確かに保存することを示そう。 \mathbf{A} を時間で微分すると

$$\dot{\mathbf{A}} = b\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + b\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{1}{mr^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.47)$$

となる。ただしここで角運動量 \mathbf{L} の時間微分はゼロであることを用いた。また運動方程式 $\dot{\mathbf{p}} = -k\mathbf{r}/r^3$ を代入した。右辺第一項は

$$-\frac{1}{mr^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{r^3} (\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}) = \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}r}{r^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.48)$$

となるので、右辺第二項と打ち消し合い、 \mathbf{A} が保存することが分かる。ただし二つ目の等式ではベクトル三重積の公式 (2.20)、三つ目の等式では $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}$ を用いた。

\mathbf{A} は中心から近日点に向かうベクトルであり、 \mathbf{A} が保存することの物理的な意味は、近日点が動かず軌道が閉じるということである⁸³。このことを最後に確認しよう。まず \mathbf{A} は明らかに \mathbf{L} と直交する。なので、 \mathbf{A} は運動平面中のベクトルだと分かる。一方、 \mathbf{r} との内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = b(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - r = b(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - r = bL^2 - r \quad (5.49)$$

と計算できる。ただし L は角運動量 \mathbf{L} のノルムである。またここでスカラー三重積の公式 (2.19) を用いた。 \mathbf{A} の向きが x 軸の向きになるように直交座標を設定すると、これは

$$Ar \cos \theta = bL^2 - r \quad (5.50)$$

なので、 r を θ の式として

$$r = \frac{1}{\frac{1}{bL^2} + \frac{A}{bL^2} \cos \theta} \quad (5.51)$$

と書ける。これは楕円軌道の式そのものである。すなわちこれは逆二乗則の場合の軌道の導出の別解になっている。また特に $\theta = 0$ のときが長軸方向なので、 \mathbf{A} は確かに近日点に向いている。

⁸²これだと保存則が追加で3つ（3方向分）得られて多すぎるように見えるかもしれない。だが、まずこのベクトルの向きは角運動量ベクトル \mathbf{L} と直交していることは構成から分かるので、独立な保存量は一つ減る。さらに、このベクトルの長さは、既に求まっている保存量である角運動量の大きさ L とエネルギー E から計算できる。そのため、ラプラス・ランゲ・レンツベクトルの独立な保存量は実質的にただ一つである。

⁸³ちなみにフック則の場合には、Demkov-Fradkin テンソルが保存量となる。

6 相対運動と座標系

この章では、運動を異なる座標系から眺めた際に、運動方程式がどのように変化するのかを考える。

6.1 慣性系と重心座標

異なる座標系の代表例としては、慣性系 (inertial frame of reference) に対して等速直線運動する座標系

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_0 t \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}_0 \quad (6.2)$$

が挙げられる。イメージとしては、「一定速度で直線的に動く車に乗っている人から見た座標」のようなものである。ただし、「動いている」「止まっている」というのはあくまでも特定の座標系から見た場合の話であり、絶対的な静止系は存在しない点には注意しておく。

特に位置に依存する外力が働いておらず、内力は相対位置にのみ依存する状況を考える。この場合、等速直線運動する座標系で見た場合の j 番目の粒子の運動方程式は

$$m \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{v}}(t) = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_0 = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \sum_i \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_i \mathbf{F}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j) \quad (6.3)$$

となり、元の運動方程式と一致する。そのため、もし力についての上記条件が満たされていて、かつ元の慣性系で運動量保存則やエネルギー保存則が成り立つのなら、等速直線運動する別の座標系から見てもやはり運動量保存則やエネルギー保存則が成り立つ⁸⁴。

特に重心座標 (barycentric coordinate) を用いた記述は便利ことが多い。重心座標は、系の重心を原点とするような座標系である。特に外力が働かない場合には、重心の運動はただの等速直線運動となり、この座標系は等速直線運動する慣性系となる。

例として、2.2 節で結果のみ紹介した、二つの物体の完全弾性衝突とエネルギー保存則の等価性を確認しよう。二つの粒子 1,2 の 1 次元衝突を重心座標系から見ると、重心が常に原点にあるという条件から

$$m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 = 0 \quad (6.4)$$

が成り立つ。これが完全弾性衝突であれば、衝突後の速度は

$$\tilde{v}'_1 = -\tilde{v}_1, \quad \tilde{v}'_2 = -\tilde{v}_2 \quad (6.5)$$

であり、このとき明らかにエネルギー保存則も成り立つ。逆にエネルギー保存則と運動量保存則を共に満たす衝突は、完全弾性衝突しかありえないこともすぐに分かる。

5 章では、原点に太陽が固定されている状況での中心力を扱った。そこでも少しコメントしたように、実際には太陽が固定されていなくても 5 章での議論はほぼ⁸⁵ そのまま成り立つ。その事実を確認しよう。惑星の位置を \mathbf{r}_1 、太陽の位置を \mathbf{r}_2 とする。またそれぞれの質量を m_1, m_2 とする。重心座標系から見ると、重心が原点であるという条件から

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2 \quad (6.6)$$

が成り立たないといけないことが導ける。よって $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (1 + m_1/m_2)\mathbf{r}_1$ なので、惑星の有効ポテンシャルは原点方向に

$$\tilde{U}(\mathbf{r}_1) := U \left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \mathbf{r}_1 \right) \quad (6.7)$$

であることが分かる。特にポテンシャルがべきの形 $U(r) = kr^a$ をしている場合には、有効ポテンシャルに移ることは、相互作用係数を

$$\tilde{k} = k \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^a \quad (6.8)$$

⁸⁴ これらの保存則は運動方程式から導かれているので、運動が同一の運動方程式で記述されるのなら、同一の関係式や保存則が得られる。

⁸⁵ ケプラー第三法則だけは成り立たないので「ほぼ」と書いた。

とリスケールするような変換をすることに対応している。

重心座標を用いると、質点系の運動エネルギーの自然な分解を行うことができる。質点系の全質量を $M := \sum_i m_i$ 、重心の速度を \mathbf{V}_G とする。また、慣性系から見た運動エネルギーと、重心座標系から見た運動エネルギーをそれぞれ K, K_G 、重心座標系から見た質点 i の速度を \mathbf{v}'_i とする。すると運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_G|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i|^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} M |\mathbf{V}_G|^2 = K_G + \frac{1}{2} M |\mathbf{V}_G|^2 \quad (6.9)$$

となり、運動エネルギーは「重心座標系から見た運動エネルギー」と「重心自身の運動エネルギー」の和であることが分かる。ここで最後の等式では、原点が重心で固定されている（変化しない）ことより $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$ が成り立つことを用いた。

6.2 回転座標と遠心力・コリオリ力

次に、座標系が原点を中心に回転している状況を考えよう。慣性系に対する回転座標系の回転の角速度を $\boldsymbol{\omega}$ とする。（回転軸が $\boldsymbol{\omega}$ に沿った向きで、回転速度が $|\boldsymbol{\omega}|$ ということ）。最初は一般の状況を考えるため、 $\boldsymbol{\omega}$ は時間依存していてもいいものとする。

記号を区別するため、この節では、 $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} := \frac{d}{dt} (\sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i)$ を「座標系の基底ベクトルの回転まで取り込んだ、ベクトル自身の時間変化」、 $\dot{\tilde{\mathbf{r}}} := \{\dot{\tilde{r}}_i\}$ を「成分表示した $\tilde{\mathbf{r}}$ の各成分の時間微分を並べたもの」とする⁸⁶。前者は慣性系から眺めたような定義で、この微分は座標系には一切よらないため $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$ が成り立つ。一方、後者は回転座標系に乗っている人が自身の座標系を基準に記述した定義である。回転座標系は（ $\boldsymbol{\omega}$ が定数の場合も）慣性系ではないため、後者の記述を用いた場合には「見かけの力」が発生する。（慣性系から見たら）特に質点に力が働いているわけではないが、慣性系ではない座標系の上の運動方程式として運動を記述する場合には、質点は（慣性系ではないことに起因する）補正項＝「見かけの力」を付け加えた運動方程式を満たす。

回転座標系の i 方向（ $i = 1, 2, 3$ あるいは x, y, z ）の単位ベクトルは

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (6.10)$$

と回転するので、 $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$ を時間微分することで、慣性系と回転座標系の間の速度の結びつきは

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) = \sum_i \dot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.11)$$

と書ける。なお、上の式は

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.12)$$

と略記することも多い。

これをもう一度時間微分すると、

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + \sum_i \dot{\tilde{r}}_i (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i) + \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right) \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + 2 \sum_i \dot{\tilde{r}}_i (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i) + \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right) \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

となる。これは

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.14)$$

と略記できる。そのため、もし元の慣性系での運動方程式が

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (6.15)$$

⁸⁶ この記法の区別は特に一般的なものではない。

だったとしたら、回転座標系での運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.16)$$

と補正される⁸⁷。補正項のうち、二項目は「遠心力 (centrifugal force)」、三項目は「コリオリ力 (Coriolis force)」と呼ばれる。四項目は座標系の回転の向きと速度が一定である場合にはゼロになる項である⁸⁸。これらは「力」と名前はついているが、座標系が回転している場合にまるでそうした力があるかのように時間発展が記述できる「見かけの力」である点には注意しておく。

言葉で書くと、遠心力は「座標の回転によって (見かけ上) 遠くに飛ばされていくように感じられる力」である (図 22)。宙返りのあるジェットコースターで、ひっくり返っているにもかかわらずジェットコースターの車体に体が押し付けられているように感じられるのは、遠心力の効果である。遠心力は高校の物理でも習ったはずで、わりとなじみ深いものであろう。

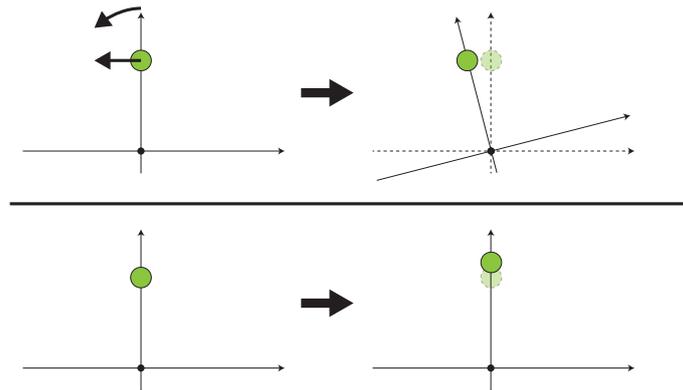


図 22: 静止系から見た場合 (上) と、回転座標系から見た場合 (下)。その物体の場所での回転座標の変化速度と、その物体自身の速度は一致しているとする (回転座標系から見ると、その物体は水平方向の速度を持たないように見える状況を考える)。回転座標系から見た場合には、何もない場合と比べて物体がより原点から遠ざかるような運動をしているように見える。これを補うのが遠心力である。

[6-1] 地球は完全に等方的な球体とする。赤道直下と北極を比べると、地球の自転による遠心力は重力の強さをどの程度変えるか。ただし地球一周はおよそ 4 万 km である。

一方、コリオリ力は「座標の回転によって (見かけ上) 速度が次第に曲がっていくように見える力」である (図 23)。座標系が反時計回りに回転しているのであれば、運動する物体は右向きに運動がそらされるように振る舞う。これを「何らかの力が働いた結果だ」として解釈する⁸⁹ ために導入されているのがコリオリ力である。

台風は、中心の低気圧領域に向けて吹き込む風がコリオリ力によって曲げられることで生じる。北半球では地面は反時計回りに回転しているため、コリオリ力は進行方向右向きに曲げるような働きをする。その結果、台風は北半球では反時計回りに渦巻く (南半球では逆に時計回りに渦巻く)。台風はこのような仕組みで発生するため、水平方向のコリオリ力が消滅する赤道付近 (緯度 5 度未満) では、台風は発生しない⁹⁰。このことは、台風の経路を可視化した図 24 を見るとよく分かるだろう。

コリオリ力のデモンストレーションとして有名な、「フーコーの振り子 (Foucault pendulum)⁹¹」を解析しよう。フーコーの振り子は大きな振り子で、コリオリ力によって振り子の振動面が次第に回転してい

⁸⁷ なお、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は定義により回転軸そのものなので、この時間微分は回転座標系から見ても元の慣性系の場合と同じ、 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ である。

⁸⁸ 「オイラー力 (Euler force)」という名前がついているが、そこまで一般的な呼び方でもない気がする。

⁸⁹ もちろん慣性系から見たら、物体はまっすぐ運動しており、ただ観測者の座標系が回転しているためにその観測者にとっては運動が曲がっていくように見えているだけである。

⁹⁰ ただし絶対に発生しないわけではなく、極めてまれには赤道付近で台風が発生することもある。東京大学 気候システム研究センター 倉田耕輔、高橋正明「赤道付近で発生した台風 Vamei(0126 号)」(<https://www.riam.kyushu-u.ac.jp/oed/wakata/seminar/seminar.data/Library/kurata.pdf>)

⁹¹ フランスの物理学者レオン・フーコー (Leon Foucault) が考案し、パリのパンテオンで実験を行った。今では上野の国立科学博物館 (東大生なら無料で入れる!) など、さまざまな科学館に設置されている。どういう挙動が見れるのかは、「フーコーの振り子 微速度撮影 (葛飾区郷土と天文の博物館)」(<https://www.youtube.com/watch?v=xLGX7WPxtBU>) の動画などで見てほしい (この動画は 24 時間を 1000 倍速再生)。

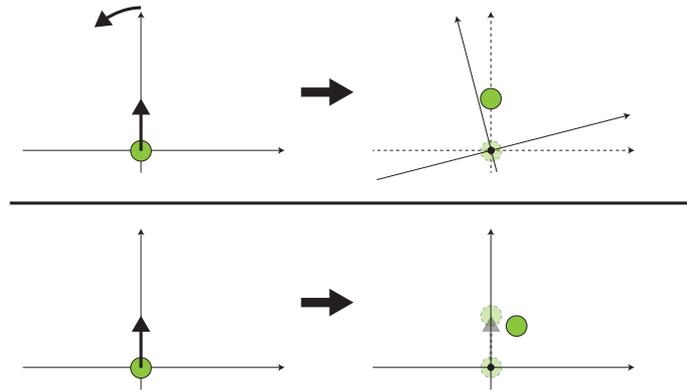


図 23: 静止系から見た場合（上）と、回転座標系から見た場合（下）。回転座標系から見た場合には、速度ベクトルが垂直方向から曲がっていくように見える。これを補うのがコリオリ力である。

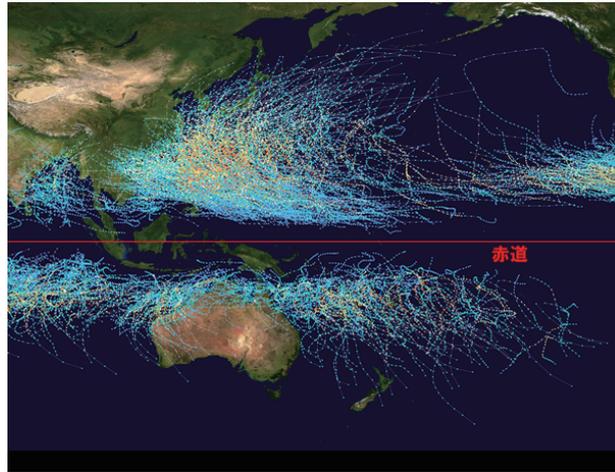


図 24: 1980 年から 2005 年までの北西太平洋上での熱帯低気圧の経路。画像は「台風が赤道上では発生しない理由」(<https://utyuu-tanosimu.net/entry281.html>) より引用。

く。振動面の回転速度は、一見すると振り子の振幅、長さ、質量、重力加速度などいろいろな量に依存しそうにも見えるが、実はコリオリ力が小さい状況では振動面回転速度はこれらの量には一切依存しない。

振り子は十分長いとして、振動面及び振動面と垂直な方向の力を線形で近似する。今、図 25 のように振動面が x 軸にあるとする。振り子の長さを l 、振り子の質量を m 、重力加速度を g とすると、 x 方向の運動は

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x \quad (6.17)$$

と書ける⁹² ので、振り子が $-R$ から R までの間を振動しているとする、 x 方向の運動は

$$x(t) = R \cos \omega t \quad (6.18)$$

であると分かる。ただし $\omega := \sqrt{g/l}$ と置いた。

座標系の回転の角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ を地面に対して垂直成分と水平成分に $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega}_{\perp}$ と分けると、振り子の振動面の回転に寄与するのは垂直成分 $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ のみである。垂直 (y) 方向の運動方程式は、コリオリ力の効果が加わるので

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - 2m\boldsymbol{\omega}_{\perp}\dot{x} = -m\omega^2y + 2m\boldsymbol{\omega}_{\perp}R\omega \sin \omega t \quad (6.19)$$

である。これは線形非斉次の微分方程式なので解くことが出来、

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \boldsymbol{\omega}_{\perp}Rt \cos \omega t \quad (6.20)$$

⁹²厳密には y 方向の運動に伴うコリオリ力も働くが、それは x の運動に対しては微小なのでここでは無視している。

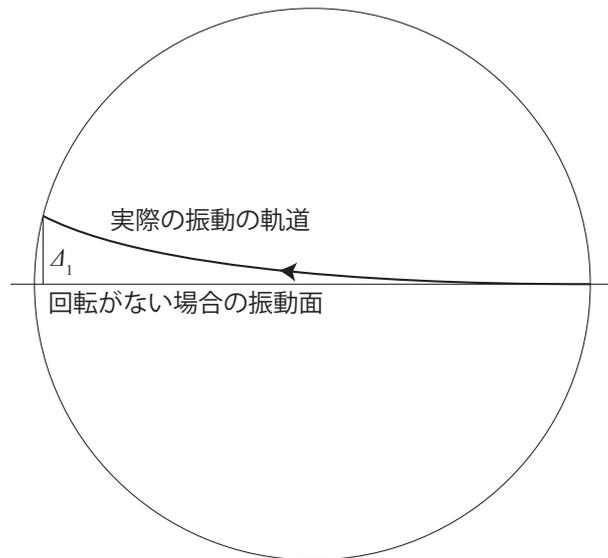


図 25: フーコーの振り子の振動の様子。回転の効果により、回転がない場合から振動面が少しずれる（この図は実際の振動面のずれを大幅に誇張して書いている）。振動面に対する垂直方向の変化を Δ_1 としている。今は Δ_1 は小さいと考えているので、 $\frac{\Delta_1}{R}$ を振動面の回転角とみなすことができる。

と一般解が求まる。 $t=0$ において $y=0$ なので、 $C_1=0$ である。 C_2 も $t=0$ で $\dot{y}=0$ という条件から簡単に求めることができるが、以下の解析では C_2 の値は重要でないので省略する。

振り子が $x=R$ から $x=-R$ まで動く半周期の間に、 y 方向にどれだけ動くか考えよう。 $t=0$ から半周期後 $t=\frac{\tau}{2}=\frac{\pi}{\omega}$ の間の変位 Δ_1 は、 $\sin(\omega\tau/2)=0$ 、 $\cos(\omega\tau/2)=-1$ より

$$\Delta_1 = y(\tau/2) = \omega_{\perp} R \frac{\tau}{2} \tag{6.21}$$

だと分かる。今は Δ_1 は小さいと考えているので、振り子の振動面の時計回りへの回転角の大きさは Δ_1/R である。よって、単位時間当たりの回転角は

$$\dot{\phi} = \frac{\Delta_1}{R\tau/2} = \omega_{\perp} \tag{6.22}$$

と求まる。

地球は 24 時間で 2π 回転するので、フーコーの振り子の実験を北極または南極で行えば、 $\omega_{\perp} = \omega$ なので、24 時間で振動面はちょうど 1 回転する。一方、赤道面からの角度（緯度）が θ の地点では、 $\omega_{\perp} = \omega \sin \theta$ である。例えば東京は北緯が大体 36 度、 $\sin 36^\circ = \sqrt{10-2\sqrt{5}}/4 = 0.5877\dots$ なので、東京でフーコーの振り子の実験を行うと振動面は 24 時間で大体 0.6 回転する。

7 質点系とラグランジアン

この章以降では、複数の質点からなる質点系や質点が集まった剛体を簡便に扱える枠組である「ラグランジュ形式」の力学を取り扱う。多くの教科書とはラグランジュ形式を導入するタイミングが異なるかもしれない⁹³が、質点系を系統的に扱うためにラグランジュ形式を導入するのは、もともとのラグランジュ (Lagrange) 自身の動機とも合致しており⁹⁴、ここでラグランジュ形式を導入する方がよいと考える。

7.1 ラグランジュ形式への動機

ここまで、質点の運動方程式を出発点に議論をしてきた。これはさまざまな場面で成功を取めていることは既に見たとおりだが、枠組の取り扱いやすさという点では以下の二つの短所がある。

第一は、直交座標以外の座標を用いたい場合に、取り扱いが面倒であるという点である。運動方程式は、直交座標系で指定した場合には式 (1.2) (質量×変数の時間二階微分=力) の形になるが、それ以外の変数で状態を指定した場合には単純に「質量×変数の時間二階微分=力」の形にはならない。例えば極座標 (r, θ) を用いた場合には、動径方向 r の運動方程式は $m\ddot{r} = F_r$ ではなく式 (5.5) ($m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r$) で与えられる。一般に、各変数での運動方程式を得るには、まず直交座標系での運動方程式を書き下し、それから変数変換して各変数の式へと変形する必要があり、煩雑である。

第二は、拘束がある場合の取り扱いが分かりにくい点である。例えば図 26 のような、質点 1 は質点 2 と長さ l の棒でつながれており、質点 2 は y 軸上のみを動ける、という状況での運動を考えてみよう。この質点系の状態は、質点 2 の位置 y と棒の角度 θ の二変数で指定可能であるが、 y と θ の満たす運動方程式を正しく導くのは面倒である⁹⁵。より複雑な拘束の場合や、質点が無数にある剛体の場合などは、さらに扱いが大変になることが容易に予想される。

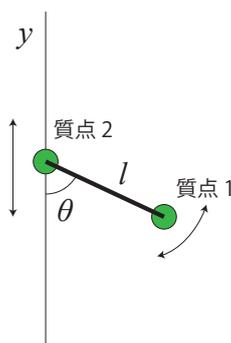


図 26: 拘束のある運動の例。この運動は 7.3 節で解析する。

こうした欠点を踏まえ、力学をより系統的かつ機械的に、つまり鋭い着想など必要なく誰でも計算できるような形で取り扱えるようにしたのがラグランジュ形式の力学である。ただしラグランジュ形式を理解するには汎関数微分と変分という考え方が必要になるので、まずそれを見ることにしよう。

7.2 (数学): 汎関数微分とオイラー・ラグランジュ方程式

多変数関数の微分 (偏微分) の自然な拡張として、「汎関数微分」を導入しよう。汎関数微分は、数学の講義できちんと扱われることは少ないが、物理においては解析力学や量子力学の経路積分においてよく使われる手法である。

n 変数関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ について、 $t \in [0, 1]$ の区間を n 等分し、 x_i を $t = i/n$ における関数 $x(t)$ の値だと見立てることにしよう (図 27)。 n をどんどん大きくしていくと、区間は細かくなっていくので、 x_1, x_2, \dots, x_n の列は、 $t \in [0, 1]$ から実数への関数 $x(t)$ にどんどん近づいていく。 $n \rightarrow \infty$ の極限をとれば、多変数関数だった $f(\mathbf{x})$ は、関数 $x(t)$ を引数に持ち、数を入力する写像 $\mathcal{F}(x(t))$ と見ることができるようになる。ただしここで、通常関数ではないことを明確にするために、これまで f と書いていたもの

⁹³ 想定カリキュラムでは、剛体の議論が全て終わった後、最後の時間に解析力学とラグランジュ形式 (とハミルトン形式) の導入を行うことになっている。だが、どのみちラグランジュ形式を学ぶのであれば、ラグランジュ形式の長所がよく活かされている剛体の議論の前にラグランジュ形式を学んだ方が有意義だと考え、このような構成にした。

⁹⁴ 山本義隆『古典力学の形成』日本評論社、有賀暢迪『力学の誕生』名古屋大学出版会など。このような「天才の着想から、誰でも計算できる枠組みへ」という変化は物理学ではしばしば見られるものであり、これらの本では「力学のマニュアル化」と呼ばれている。

⁹⁵ これまでの方法で解くのなら、各質点の xy 座標 4 つに対する (未知の効力を含む) 運動方程式を立てたうえで、与えられている拘束を満たすように抗力をうまく解いて求める必要がある

を \mathcal{F} と書いた。このように、関数を引数にとり、数を出力する写像を「汎関数 (functional)」という。汎関数 $\mathcal{F}(x(t))$ の具体的な形としては、例えば

$$\mathcal{F}(x(t)) = \int_0^1 dt \cdot [3x(t)^2 - x(t) \sin t] \quad (7.1)$$

$$\mathcal{F}(x(t)) = \int_0^1 dt \cdot \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx(t)}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} x(t)^2 \right] \quad (7.2)$$

といったものがある。これらは $[0, 1]$ 区間の関数 $x(t)$ を定めると値 (数) が定まるので、確かに汎関数である。(なお、後者は調和ポテンシャル中の粒子の作用積分である)

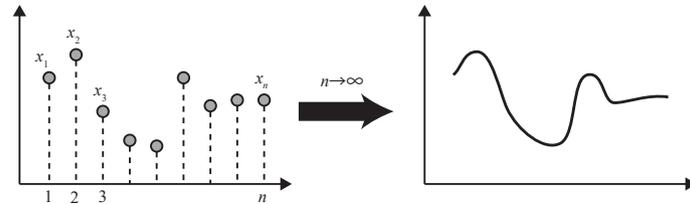


図 27: 多変数関数と汎関数との大雑把なつながり。

n 変数関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の引数が微小に変化した際の値の変化は、微小な数 $\varepsilon > 0$ を用いて

$$f(x_1 + \varepsilon a_1, \dots, x_n + \varepsilon a_n) - f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \varepsilon a_i + O(\varepsilon^2) \quad (7.3)$$

で与えられる。ただし $O(\varepsilon^2)$ は、 ε の 2 次以上の項という意味である。特に n 変数関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が極値をとる必要条件は、 n 個の変数すべてについて、 f の偏微分がゼロとなることである⁹⁶。すべての偏微分がゼロというのは、引数 \mathbf{x} を $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a}$ に取り換えても、 $\varepsilon \mathbf{a}$ の一次の範囲では値が変化しない、すなわち

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} = 0 \quad (7.4)$$

が任意の i で成り立つということである。このとき $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{a}) + O(\varepsilon^2)$ が成り立つ。

汎関数の場合も同様に考える。説明を簡単にするため、以下しばらく $\mathbf{x}(t)$ をスカラー関数 $x(t)$ に限定して説明を行う。汎関数 $\mathcal{F}(x(t))$ の引数の関数を $x(t)$ から $x(t) + \varepsilon f(t)$ へと微小に変化した際の値の変化が、任意の $f(t)$ について

$$\mathcal{F}(x(t) + \varepsilon f(t)) - \mathcal{F}(x(t)) = \varepsilon \int dt g(t) f(t) + O(\varepsilon^2) \quad (7.5)$$

と書けるとする。このとき、ここに現れた $g(t)$ (一般には t を引数を持つ関数または超関数になる) を $\mathcal{F}(x(t))$ の「汎関数微分 (functional derivative)」と呼び、このような $g(t)$ を特に

$$g(t) = \frac{\delta \mathcal{F}(x(\cdot))}{\delta x(t)} \quad (7.6)$$

と書く。汎関数の最適化問題を考えたい状況はよく生じるが、その場合にも上記の多変数関数の場合をそのまま敷衍する。 $\mathcal{F}(x(t))$ の極値を与える $x(t)$ は、 $x(t)$ を図 28 のように $x(t) + \varepsilon f(t)$ に取り換えても ε の一次の範囲では値が変化しない、すなわち

$$\mathcal{F}(x(t)) = \mathcal{F}(x(t) + \varepsilon f(t)) + O(\varepsilon^2) \quad (7.7)$$

が成り立つと考えられる。この条件は

$$\frac{\delta \mathcal{F}(x(\cdot))}{\delta x(t)} = 0 \quad (7.8)$$

⁹⁶もし偏微分がゼロにならないのであれば、その向きに \mathbf{x} を動かすことによって f の値を大きくすることも小さくすることも出来てしまい、極大・極小値をとることができない。よって極値では偏微分はすべてゼロになる。ただし逆は必ずしも正しくなく、変曲点の場合や鞍点の場合には、偏微分はすべてゼロだが極値ではない点も存在する。

と書き現せる。一般に汎関数微分は通常関数ではなく（デルタ関数と同じ）超関数の類であるため、何か関数をかけて積分することを前提にして存在が許されるものであり、式 (7.5) に立ち返って考える必要があるものである。

汎関数微分の計算をする際、もし汎関数の中に $x(t)$ の t 微分が現れないならば、普通の数のように関数を微分してしまえばよい。例えば式 (7.1) の例ならば

$$\frac{\delta \mathcal{F}(x(\cdot))}{\delta x(t)} = 6x(t) - \sin t \quad (7.9)$$

と計算できる。これが任意の時刻 t でゼロになるのが極値なので、極値となる関数は $x(t) = (\sin t)/6$ と解ける。しかし、式 (7.2) のように汎関数 \mathcal{F} が時間微分を含む場合は、単純にはいかない（そもそも単なる t の関数にはならない）。この場合には、出発点の関係式である式 (7.5) に立ち返って、 $x(t)$ の微小変化が何を意味するのか、きちんと考える必要がある。それを行うと得られるのが、以下のオイラー・ラグランジュ方程式である。

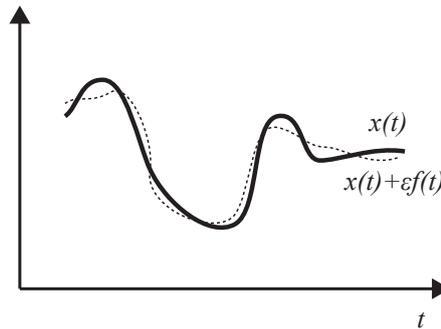


図 28: 汎関数微分における関数の微小変形のイメージ図。太線 $x(t)$ が変形されて破線 $x(t) + \epsilon f(t)$ に変形される。この変形の下で、 $\mathcal{F}(x(t))$ に $\epsilon f(t)$ の一次の項が現れないならば、関数 $x(t)$ は \mathcal{F} の極値の候補となる。

ラグランジアンという関数 $L(x, \dot{x})$ は、 $x(t)$ と $\dot{x} := \frac{dx(t)}{dt}$ の関数の値を引数に含んだ 2 変数関数である⁹⁷。ラグランジアンの時間積分

$$S(x(t)) := \int_0^\tau dt L(x, \dot{x}) \quad (7.10)$$

は「作用 (action)」と呼ばれ、これは関数 $x(t)$ を定めると値が定まる汎関数である。始点と終点の位置、 $x(0)$ と $x(\tau)$ 、 \dot{x} が与えられた値に固定されているという条件下で⁹⁸、作用の極小値を与える関数を $x^*(t)$ とする。汎関数微分の停留点 $\frac{\delta S(x(t))}{\delta x(t)} = 0$ の解を直接探すのは難しいが、実は停留点 $x^*(t)$ は別の微分方程式の解になっている。

ラグランジアン L は 2 変数関数なので、 $x(t)$ を a 、 $\frac{dx(t)}{dt}$ を b とし、 $L(a, b)$ と書いて構わない。このとき、式 (7.7) で見たように、作用 $S(x(t))$ の極小解が $x^*(t)$ であるならば、 $f(0) = f(\tau) = 0$ を満たす⁹⁹ 任意の滑らかな関数 $f(t)$ について $S(x^*(t)) = S(x^*(t) + \epsilon f(t))$ が成り立つはずである。この事実より、 ϵ の

⁹⁷ 一般にはラグランジアンは時間依存性を持つが、ここでは簡単のため時間依存しない場合の値を扱っている。

⁹⁸ 拘束条件の与え方がなぜ「始点と終点の固定」なのか、気になる人もいるだろう。他の拘束、例えば「始点 $x(0)$ のみを固定する」や「始点と終点の位置と速度、 $x(0), \dot{x}(0), x(\tau), \dot{x}(\tau)$ 、を固定する」のような拘束を考えることもできるからである。

結論から言ってしまうと、物理的な状況を考えている場合には、確かに異なる拘束条件を用いても同一のラグランジアンからは同一の運動法則が得られるが、実際の物体の運動の軌道が導かれるとは限らない。質点の運動方程式 (1.2) を解く場合との対応関係は、「運動方程式 \leftrightarrow ラグランジアン」「運動方程式の初期条件 \leftrightarrow 端点の拘束条件」となっている。運動方程式の初期条件は通常「時刻 0 での位置と速度」で与えられ、これにより運動の軌道がただ一つの解として得られる。ここで、もし「時刻 0 での位置」しか与えられなかったならば、運動の軌道は無数に得られてただ一つに定まらない。逆に、もし「時刻 0 での位置と速度、及び時刻 τ での位置と速度」が条件として与えられたら、一般にそれを満たす運動の軌道は存在しない（解なし）という結果になる。なので、運動方程式そのものは常に正しいが、適切な運動の軌道を得たいのならば「適切な拘束」を課す必要がある。

⁹⁹ この制限は、 $x(0)$ と $x(\tau)$ は与えられた値に固定されている、という条件を反映したものである。

一次までで評価すると、極小解 $x^*(t)$ は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}(x(t) + \varepsilon f(t)) - \mathcal{S}(x(t)) &= \int_0^\tau dt L(x(t) + \varepsilon f(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{f}(t)) - \int_0^\tau dt L(x(t), \dot{x}(t)) \\
 &= \int_0^\tau dt \left[\frac{\partial L}{\partial a} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} \cdot \varepsilon f(t) + \frac{\partial L}{\partial b} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} \cdot \varepsilon \frac{d}{dt} f(t) \right] + O(\varepsilon^2) \\
 &= \int_0^\tau dt \left[\frac{\partial L}{\partial a} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial b} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} \right) \right] \cdot \varepsilon f(t) + O(\varepsilon^2)
 \end{aligned} \tag{7.11}$$

が任意の $f(t)$ でゼロになる $x(t)$ であるということが分かる。右辺の積分が任意の $f(t)$ でゼロになるためには、角カッコ内の式が恒等的にゼロでないといけない。すなわち

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial b} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} \right) - \frac{\partial L}{\partial a} \Big|_{a=x(t), b(t)=\frac{dx(t)}{dt}} = 0 \tag{7.12}$$

が成り立つ必要がある。これが「オイラー・ラグランジュ方程式 (Euler-Lagrange equation)」である。なお慣習的に、通常オイラー・ラグランジュ方程式は、式 (7.12) のように変数を置き直したりせずに

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{7.13}$$

と書く。これはあくまでも上で示したことの省略形であることに注意しておく¹⁰⁰。

今までは $x(t)$ はスカラーとしてきたが、一般に d 次元中の N 粒子の系であれば、 $x(t)$ はスカラーではなく dN 次元ベクトルになる。この場合も、今までの議論はそのまま成り立つ。この場合、位置座標の組 $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ をまとめて一つのベクトル \mathbf{q} で表すこともある (\mathbf{q} は時刻 t に依存した dN 次元ベクトル)。 \mathbf{q} 全体を一つのベクトルと見て、座標表示して作られた空間が配位空間 (configuration space) である。例えば 1 次元中に 3 つの質点 1,2,3 がある質点系の配置は、各質点の位置 x_1, x_2, x_3 で指定されるが、これを 3 次元空間中の一点 (x_1, x_2, x_3) として表したものが配位空間である。

7.3 ラグランジュ形式

ラグランジアンと変分を用いたラグランジュ形式で、まず拘束のない質点系の運動はどのように書けるのか考えよう。天下りだが¹⁰¹、力がポテンシャル力のみで書ける場合、直交座標系を用いると、 N 個の質点系のラグランジアンを

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = K - U = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \tag{7.14}$$

とすれば、オイラー・ラグランジュ方程式 (7.13) は通常の運動方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_i = -\nabla_i U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \tag{7.15}$$

になる¹⁰²。ただし一項目の $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2$ は運動エネルギー、二項目の $U = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ は全質点のポテンシャルエネルギーであり、一体ポテンシャル、相互作用ポテンシャル、等をすべて足しあげたものである。例えば式 (7.2) (の角カッコの中身) をオイラー・ラグランジュ方程式 (7.13) に代入すれば、線形ばねの運動方程式 (4.17) が得られる。

ラグランジュ形式が、最初に挙げた二つの課題、(i) 直交座標以外の変数で記述する場合の取り扱い、(ii) 拘束がある場合の取り扱い、を解決していることを見ておこう。

¹⁰⁰慣れないと、式 (7.13) に基づいて計算していて「 \mathbf{x} 微分をする際に、 $\dot{\mathbf{x}}$ も \mathbf{x} に依存しているが、これは微分しなくていいのだろうか」などと悩んでしまう人もしばしばいるが、この式の正しい意味をきちんと理解しておけば混乱はしなくてすむ。

¹⁰¹天下りに結果を得るのが嫌な場合は、7.5 節の補論で質点の運動方程式からラグランジアンを「導いて」いるので、そちらを見ていただきたい。

¹⁰² $|\mathbf{r}_i|^2 = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_j r_{i,j}^2$ である点に注意。ただし $r_{i,j}$ はベクトル \mathbf{r}_i の j 番目の成分を表している。

まず「(i) 直交座標以外の変数で記述する場合の取り扱い」だが、これはラグランジアンをそのまま新しい変数で書き直せばよい。なぜなら、どの変数・座標で配位空間を記述していたとしても「作用を最小にする経路」は同一だからである。例として、5.1 節で導出した、中心力場の 2 次元の運動の極座標表示を再導出しよう。極座標表示した運動エネルギーは

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) \quad (7.16)$$

である¹⁰³。ポテンシャルエネルギーはそのまま $U(r)$ なので、 r についての運動方程式は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left(\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \right) \\ &= \frac{d}{dt} m\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{d}{dr} U(r) \\ &= m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{d}{dr} U(r) \end{aligned} \quad (7.17)$$

となり、式 (5.5) が正しく再導出される。また θ についての運動方程式は、

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \right) = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\theta}) \quad (7.18)$$

となり、角運動量保存則が正しく再導出される。5.1 節ではかなり注意深く基底ベクトルの変化を計算しないといけなかった（この辺りはわりとミスしやすい計算でもある）ことと比べると、ラグランジアンを用いた方法は極めて機械的に行える楽な方法である。また、極座標よりもはるかに複雑な座標の取り方をした場合にも、ラグランジュ形式は応用が容易である。

次に「(ii) 拘束がある場合の取り扱い」だが、これもラグランジアンの変数を適切に増減させるだけで取り扱える。ここでは特に、拘束が（速度を含まず）位置のみの関数の形で書ける場合を考えることにしよう。例えば「二つの質点が剛体棒でつながれている」「質点がある曲線上しか動けない」などの状況はこれに該当する。また剛体を無数の質点の集まりと考える場合も、このタイプの拘束と解釈できる。このような「位置 \mathbf{r}_i の関数のみの形 ($f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$ の形) で書かれる拘束」のことを「ホロノーム拘束 (Holonomic constraints)」という¹⁰⁴。ラグランジュ形式では、拘束の存在は「変分をとる関数 $x(t)$ (あるいは極小点近傍に加える関数 $f(t)$) の動ける範囲の制限」という形で現れる。

ホロノーム拘束の場合、適切に変数を取り直すことで「拘束を満たす空間内を過不足なく指定する変数 $\{\mathbf{s}_j\}$ 」と「拘束と垂直な向きの変数（拘束を受けるとゼロになる変数） $\{\mathbf{u}_k\}$ 」の組を変数にすることができる。すると、変分をとる関数は拘束によって全 k で $\mathbf{u}_k = 0$ を満たすような範囲しか $x(t)$ は動かない (図 29)。そのため今考えている系は、そもそも変数 $\{\mathbf{u}_k\}$ は存在せず、 $\{\mathbf{s}_j\}$ のみのラグランジアンだと思って変分をとった場合と全く同一である。よって、ホロノーム拘束がある場合は、拘束を満たす状態を過不足なく推定できるような変数でラグランジアンを記述して、あとはこれまでと同様にオイラー・ラグランジュ方程式 (7.13) に代入すればよい。

例として、図 26 で見た、2 次元平面中の質点 1 と 2 が長さ l の剛体棒でつながれており、さらに質点 2 は y 軸上しか動けない、という状況の運動方程式を考えよう。この質点系の位置は、質点 2 の位置 y と、剛体棒と y 軸のなす角 θ の 2 変数で完全に指定される。ポテンシャルは特に働いていないものとする。これらの変数の運動方程式を導こう。質点 1,2 の運動エネルギーの合計は

$$K = \frac{1}{2}m_1((l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l\dot{\theta} \sin \theta + \dot{y})^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{y}^2 = \frac{1}{2}m_1((l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{\theta} \sin \theta \dot{y}) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 \quad (7.19)$$

¹⁰³運動エネルギーを記述するため、速度の変換までは計算する必要がある。ただこの計算は加速度の変換と比べると圧倒的に容易な場合が多い。

¹⁰⁴ホロノームではない拘束を「非ホロノーム拘束」という。非ホロノーム拘束の代表例は、ざらざらした 2 次元の表面の上を滑らずに転がる物体である。「滑らずに転がる」という条件は、一般の場合にはホロノームな形では記述できない。

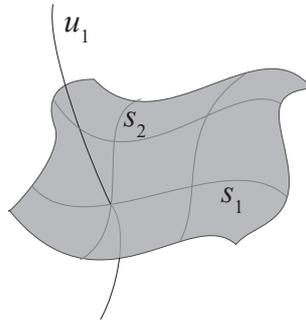


図 29: 拘束がある場合の状態空間のイメージ。拘束がある場合、状態は s_1, s_2 だけで指定される曲面上 (図中グレー) に拘束され、 u_1 方向には変化できない。

と書ける。そのため、それぞれの変数の運動方程式として

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2} m_1 ((l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{\theta} \sin \theta \dot{y}) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} m_1 ((l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{\theta} \sin \theta \dot{y}) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left[m_1 (l^2 \dot{\theta} + l \sin \theta \dot{y}) \right] - m_1 l \dot{\theta} \cos \theta \dot{y} \\
 &= m_1 l^2 \ddot{\theta} + m_1 l \sin \theta \ddot{y}
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

及び

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}} \left(\frac{1}{2} m_1 ((l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{\theta} \sin \theta \dot{y}) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} m_1 ((l\dot{\theta})^2 + 2l\dot{\theta} \sin \theta \dot{y}) + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{y}^2 \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(m_1 l \dot{\theta} \sin \theta + (m_1 + m_2) \dot{y} \right) \\
 &= m_1 l \ddot{\theta} \sin \theta + m_1 l (\dot{\theta})^2 \cos \theta + (m_1 + m_2) \ddot{y}
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

が得られる。

今は質点 1, 2 がともに自由に運動している状況設定で考えていたが、この運動方程式は一方の質点が外部から操作されている場合にも正しく成り立つ。特に質点 2 を $y = -a \sin \Omega t$ と振動させると、質点 1 の運動方程式は

$$m_1 l^2 \ddot{\theta} = -m_1 l \sin \theta a \Omega^2 \sin \Omega t \tag{7.22}$$

となり、4.3 節では天下一りに与えた式 (4.52) (を式 (4.44) に代入したもの) が導出できる。

今回の例に限らず、外部から時間依存する操作を受けるパラメータがある場合の拘束系の運動方程式は、いったんそのパラメータを自由な質点とみなしてラグランジアンを求めて運動方程式を導き、その後に操作されたパラメータの満たす変化を代入することで導出することができる。

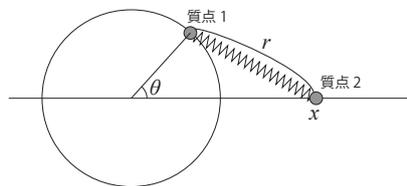


図 30: 質点 1 は円上に、質点 2 は x 軸上に拘束されている

[7-1] 二次元平面上の 2 つの質点 1, 2 からなる質点系を考える。図 30 のように、質量 m_1 の質点 1 は原点中心の半径 l の円周上に拘束されており、質量 m_2 の質点 2 は x 軸上に拘束されている。質点 1 と 2 の間には (自然長ゼロの) バネがあり、両質点間の距離を r とすると、バネは $\frac{1}{2} k r^2$ というポテンシャルエネルギーを持つ。拘束力とバネ以外の力はこの系には働いていない。

この質点系の座標として、質点1の(x軸からの)偏角 θ と、質点2のx座標の値 x の組 (θ, x) を用いることにする。この質点系のラグランジアンを求めよ。また、オイラー・ラグランジュ方程式を用いることで、 θ に対する運動方程式(θ の二階微分を、 θ, x の一階微分及び θ, x 自身の関数として表した式)を求めよ。

7.4 対称性と保存則

ラグランジュ形式の一般論を導入したので、この枠組から一般的に導ける関係である「ネーターの定理」を導出しよう。ネーターの定理は「系に対称性があれば、必ずそれに伴う保存則が存在する」ということを主張する定理である。

変数 \mathbf{q} を、 \mathbf{q} とは微小に違う変数 $\mathbf{q}' = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{a}$ へと変換することを考えよう。ただし ε は微小な数であり、 \mathbf{a} は一般には時間依存していてもよい。この変換により、一般にはラグランジアン $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ は異なるラグランジアン $L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}')$ に変換される。 L' は一般には L とは異なる関数形をしている¹⁰⁵。しかし、系によっては L と L' が全く同じ関数になる場合がある。このとき、この系には「対称性がある」という。例えば1次元中の線形ばねでつながれた2つの質点系のラグランジアンは

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 \quad (7.23)$$

であるが、変換 $x'_1 = x_1 + \varepsilon a$ 、 $x'_2 = x_2 + \varepsilon a$ (a は時間依存しない定数)に対し、

$$\begin{aligned} L'(x'_1, x'_2, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2) &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}'_1 - \varepsilon\dot{a})^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}'_2 - \varepsilon\dot{a})^2 - \frac{1}{2}k((x'_1 - \varepsilon a) - (x'_2 - \varepsilon a))^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}'_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}'_2^2 - \frac{1}{2}k(x'_1 - x'_2)^2 \\ &= L(x'_1, x'_2, \dot{x}'_1, \dot{x}'_2) \end{aligned} \quad (7.24)$$

と、ラグランジアンはその形を変えない。今考えた変換は「系全体を εa だけ並進させる」という変換であり、この変換でラグランジアンを不変に保つ系は「並進対称性を持つ」といわれる。

ラグランジアンが対称性を持つならば、変換によってラグランジアンが変化しないので、 ε の一次までで

$$\begin{aligned} L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') - L'(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') &= L(\mathbf{q}', \dot{\mathbf{q}}') - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \varepsilon a_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon \frac{d}{dt} a_i \right] \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] \varepsilon a_i + \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon a_i \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon a_i \right) \end{aligned} \quad (7.25)$$

がゼロになる必要がある。ただし4行目ではオイラー・ラグランジュ方程式(7.13)を用いた。この右辺がゼロということは

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} a_i \quad (7.26)$$

は時間変化しない量、すなわち保存量だということが分かる。これが「対称性¹⁰⁶があれば必ず保存則がある」という「ネーターの定理 (Noether's theorem)」である。

ネーターの定理が何を意味するのかを具体例で見ておこう。先ほど見た1次元中の線形ばねでつながれた2つの質点系のラグランジアン(7.23)は並進対称性を持っていた。そのため、ネーターの定理により

$$C = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} a + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} a = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)a \quad (7.27)$$

は保存量だと分かる。全体を定数 a で割れば、これは運動量保存則そのものである。つまり、「系が運動量保存則を満たす」ことは「系が並進対称性を持つ」ことの反映だったということである。

¹⁰⁵ \mathbf{q}' は \mathbf{q} の関数であり、 L と L' は $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L'(\mathbf{q}'(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}'(\mathbf{q}))$ という形で結びついている。 L と L' は、 \mathbf{q} と \mathbf{q}' という違うものを引数にとって同一の値を持たないといけなないので、一般には互いに異なる関数である。

¹⁰⁶ 導出から分かるように、この対称性は連続対称性でないといけな。離散対称性の場合には必ずしも保存量は伴わない。

[7-2] 2次元中の質点系を考える。座標は極座標 $(r_1, \theta_1, \dots, r_N, \theta_N)$ を用いるこの質点系が原点周りの回転に対する対称性を持つ、つまり $\theta'_i = \theta_i + \varepsilon a$ という変換でラグランジアンが不変とする。このとき、この系が角運動量保存則を満たすことを、ネーターの定理を用いて導け¹⁰⁷。

7.5 <補論>：質点の運動方程式からのラグランジアンへの導出

多くの教科書では、質点系の運動方程式を出発点に、ラグランジアンを導出していると思う。そのようなラグランジアンへの導入の方が理解しやすい人もいると思うので、その道筋をここで簡単に解説しておく。

質点系の位置ベクトル及び力は、全成分束ねて \mathbf{x} および \mathbf{F} と書く。3次元空間中の n 個の質点の系の場合、これらは $3n$ 次元のベクトルである。質点系に働く力 \mathbf{F} を、拘束条件を満たすための拘束力 \mathbf{F}^{cons} と、それ以外（質点の運動に寄与する力） \mathbf{F}^{mot} に分けることにしよう。すると、質点の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} - \mathbf{F} = m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} - \mathbf{F}^{\text{cons}} - \mathbf{F}^{\text{mot}} = 0 \quad (7.28)$$

と書ける。ただしここでは表記を簡単にするために全質点の質量は等しく m であるとしているが、質量が異なる場合も議論は全く変わらない。

ここで、拘束を満たすような範囲で \mathbf{x} を微小に変えることを考えよう。このような変化を「仮想変位 (virtual displacement)」という。そして、式 (7.28) の左辺にその微小変位 $\delta \mathbf{x}$ を掛けてみよう。すると、拘束力は拘束条件とは垂直な向き¹⁰⁸ に働くので

$$\mathbf{F}^{\text{cons}} \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (7.29)$$

が成り立つ。そのため

$$\left(m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} - \mathbf{F}^{\text{mot}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} = 0 \quad (7.30)$$

が成り立つことが分かる。式 (7.30) は「ダランベールの原理 (D'Alembert's principle)」と呼ばれる。

さて、特にある運動の軌道 $\mathbf{x}(t)$ ($0 \leq t \leq \tau$) が与えられているときに、始点と終点 $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}(\tau)$ は固定して、拘束条件を満たすように途中の経路を少し変更することを考えよう。全時刻 $0 \leq t \leq \tau$ にまたがって式 (7.30) を積分すると

$$0 = \int_0^\tau dt \left(m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} - \mathbf{F}^{\text{mot}} \right) \cdot \delta \mathbf{x} = \int_0^\tau dt \left(-m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}^{\text{mot}} \cdot \delta \mathbf{x} \right) \quad (7.31)$$

となる。ただし二つ目の等式では部分積分を行った。

力はポテンシャル力からもたらされる、つまり $\mathbf{F}^{\text{mot}} = -\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ が成り立つとしよう。すると、右辺のカッコ内は

$$-m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{F}^{\text{mot}} \cdot \delta \mathbf{x} = -m \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} + \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = -\delta L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) \quad (7.32)$$

と整理できる。ただし L は

$$L(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 - U(\mathbf{x}) = K - U \quad (7.33)$$

であり、 δL は (\mathbf{x} が $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$ に変化したことによる) L の微小変化である。この結果は、 L の積分値は、実際に実現する運動の経路において停留値となる (1次の微小変化で値を変えない) ことを意味している。

これは、本編で導いたラグランジアンと式 (7.33) の性質そのものである。つまり、ラグランジアンが質点の運動方程式から導かれたということである。

¹⁰⁷ここで、これまで学んできたこととこの結果の間には不整合を感じるかもしれない。2.4節では、角運動量保存則は強い作用・反作用の法則から導かれた。また、脚注9では、電流間の電磁気力が強い作用・反作用の法則を満たさない (ように見える) ことを述べた。そうすると電磁気力は回転対称性を持たないことになりそうだが、そういうことはあり得ないように思える。

実は、電磁気力が強い作用・反作用の法則を破るように見えたのは、電磁場の持つ運動量を考慮していなかったためである。実際には、まず電流が磁場を作り、その磁場が伝わり、もう一方の電流に力を及ぼす。そのため電流だけでは記述が閉じておらず、電磁場の運動量 (これは後に習う電磁気学において適切に定義される) の変化もまた考慮する必要があり、それまで考えると電流+電磁場はちゃんと強い作用・反作用の法則を満たしている。

¹⁰⁸ここでいう「垂直」は、 $3n$ 次元の状態空間で見えた場合の話である。例えば二つの質点を硬い棒でつないでいる場合、個々の質点のみで見ると、その質点の運動に沿った向きにも拘束力は働きうる。しかし、二つの質点をまとめて考察すると、「両質点に働く拘束力」は「(拘束条件の下で) 二つの質点の組を指定する変数が動きうる空間」に対して垂直である。

8 剛体の一般論

この章と次の章では、3次元空間中の剛体の運動を取り扱う。この章で一般論を概観したのち、次の章でさまざまな剛体運動の具体例を議論する。

8.1 慣性モーメントテンソル

一点が固定された剛体を考えよう。地球コマや剛体振り子¹⁰⁹のように実際に一点が固定されている状況だけでなく、重心座標系で見た一般の剛体がこの設定に該当する。以下固定された点を原点として議論を進める。

位置 \mathbf{r} における剛体の速度を $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ とする。物体が剛体であることにより、この点の原点からの距離は常に r で一定である。そのため $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は必ず \mathbf{r} と直交するので、ある適切なベクトル $\boldsymbol{\omega}$ が存在し、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8.1)$$

と書ける。この $\boldsymbol{\omega}$ は「角速度ベクトル」と呼ばれ、剛体が「 $\boldsymbol{\omega}$ の向きを回転軸に、角速度 $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ で回転している」ことを表す（なお、この導入の仕方だと $\boldsymbol{\omega}$ は位置 \mathbf{r} ごとに異なるベクトルでもよさそうだが、剛体が場所ごとに異なる回転速度で回転しているのは物理的にも不合理だし、実際 $\boldsymbol{\omega}$ は場所によらず同一のベクトルであることが示せる¹¹⁰）。このことは、一点が固定された剛体の運動は、必ず「ある軸周りの回転運動」であることを意味している¹¹¹。

ラグランジアンを求めるには運動エネルギーを計算する必要があるので、以下では運動エネルギー及びそれに関連する量を求めよう。運動エネルギー K は全角運動量 \mathbf{L} と密接に結びついている。剛体の位置 \mathbf{r} における密度を $\rho(\mathbf{r})$ とすると、この剛体の全角運動量は

$$\mathbf{L} := \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} \quad (8.3)$$

と書ける¹¹² が、運動エネルギーは

$$K := \int \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}))\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} \quad (8.4)$$

と全角運動量を用いてきれいに表せる。ただし三つ目の等式ではスカラー三重積の公式 (2.19) を用いた。

全角運動量 \mathbf{L} は、ベクトル三重積の公式 (2.20) を用いると

$$\mathbf{L} := \int \mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int \boldsymbol{\omega} |\mathbf{r}|^2 - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \left[\int (|\mathbf{r}|^2 I - \mathbf{r}\mathbf{r}^\top) \rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right] \boldsymbol{\omega} \quad (8.5)$$

と書ける。ただし I は 3×3 の単位行列、 $\mathbf{r}\mathbf{r}^\top$ は「 3×1 行列と 1×3 行列の積」として得られる 3×3 行列である。最後の等式では、実ベクトル同士の内積が転置との積 $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{r}^\top \boldsymbol{\omega}$ であることを用いている。丸

¹⁰⁹ 通常の振り子は末端の一点に非常に重い重りを取り付けるが、剛体振り子は全体に有限の質量を持った剛体の一点を固定して振動させたものである。

¹¹⁰ 別の場所 \mathbf{r}' において、 $\frac{d}{dt}\mathbf{r}' = \mathbf{v}(\mathbf{r}') = \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$ であるとする。すると、物体が剛体であることから $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'$ が時間変化しないことが分かるので、

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') = \mathbf{r} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}' + \mathbf{r}' \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}') + \mathbf{r}' \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}' \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = (\boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}) \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}) \quad (8.2)$$

が示せる。ただし最後から二番目の等式ではスカラー三重積の公式 (2.19) を用いた。 \mathbf{r}' と \mathbf{r} は任意なので、 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$ が成り立つことが分かる。

¹¹¹ この結果には「オイラーの定理」という名前がついている。

¹¹² この積分は線積分ではなく、空間中のすべての点をくまなく積分している重積分 ($\int d\mathbf{r} = \int \int \int dx dy dz$) である点に注意。

カッコ内の行列 $|\mathbf{r}|^2 I - \mathbf{r}\mathbf{r}^\top$ を成分表示すると

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} &= (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.6)$$

となる。これを積分して得られる角カッコの行列を「慣性モーメントテンソル (moment of inertia tensor)」、あるいは単に「慣性テンソル (inertia tensor)」と呼び¹¹³、 I と書く。慣性テンソルの対角成分 (I_{xx} など) は「慣性モーメント」、「慣性モーメント係数」、「慣性能率¹¹⁴」などと、非対角成分 (I_{xy} など) は「慣性乗積 (product of inertia)」、「慣性積」などと呼ばれる。慣性テンソルを用いると、運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I \boldsymbol{\omega} \quad (8.7)$$

ときれいな形で書ける。質点の運動エネルギーが $K = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot m \mathbf{v}$ と書けることを思い出すと、 $\mathbf{v} \leftrightarrow \boldsymbol{\omega}$ 、 $m \leftrightarrow I$ という対応関係が見て取れる。特に、慣性テンソルはある意味で「質量」のような役割を果たす量であることが分かる¹¹⁵。

I を成分表示すると

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & - \int xy \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & - \int xz \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ - \int xy \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & \int (x^2 + z^2) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & - \int yz \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \\ - \int xz \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & - \int yz \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} & \int (x^2 + y^2) \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

となる。一般には I は非対角項もゼロではない点に注意しておこう。これはすなわち、例えば剛体が z 軸周りの回転をしている場合に、 x 軸周りの角運動量が一般には発生するということである。このことは一見すると奇妙に思えるかもしれないが、そう感じられるのは暗黙裡に「対称性のよい剛体」を考えてしまっているためである。例えば図 31 のように、2 か所に重りを付けた軽い板を z 軸周りに回転させる状況を考えてみると、この回転によって x 軸周りに角運動量が生じる (図 31 右)。

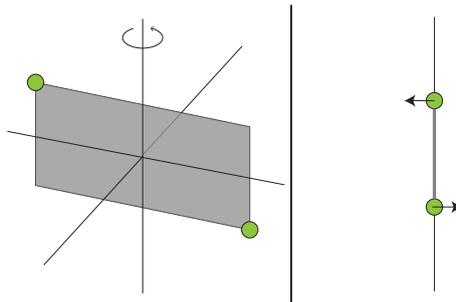


図 31: (左) 2 か所に重りを付けた軽い板を z 軸周りに回す状況。(右) これを真横から見ると、 x 軸周りにも角運動量が生じている。

一方、式 (8.8) の非対角項の形より、もし $x \rightarrow -x$ の鏡映反転で剛体に変化しないのならば、 $I_{xy} = I_{xz} = 0$ であることが分かる。このように対称性のよい剛体の場合には、非対角項はゼロになり、慣性テンソルは対角項のみになる (ちなみに、一般の剛体においても、適切な座標軸を取れば、必ず慣性テンソルは対角項の

¹¹³ 「テンソル」は、複数のベクトルを引数に持ち、数 (スカラー) を出力する双線形な関数である。行列 A は、 $f(\mathbf{v}, \mathbf{u}) := \mathbf{v} \cdot A \mathbf{u}$ と見ればテンソルの定義を満たすので、慣習的にテンソルと呼ばれている。ただし実質的には行列として理解してここでは特に困らない。

¹¹⁴ 英語ではどちらも「moment of inertia」のようである。

¹¹⁵ ただし I は一般に数ではなく行列であり、そのため $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$ は一般に $\boldsymbol{\omega}$ とは向きが異なる点には注意が必要である。

みに出来る事が証明出来る¹¹⁶⁾。慣性テンソルが対角行列となるような三つの軸を「慣性主軸 (principal axis)」という。対称性がよい場合には、xyz 軸がそのまま慣性主軸となる。このときの慣性テンソルの対角項、 $I_x := I_{xx}$, $I_y := I_{yy}$, $I_z := I_{zz}$ を「主慣性モーメントテンソル (principal moment of inertia)」という。

[8-1] xy 平面に一般の形の板がある。板の向きは、x 軸と y 軸が慣性主軸となるように置かれている。このとき、 $I_z = I_x + I_y$ が成り立つことを示せ。

いくつかの代表的な形の剛体の慣性モーメントを以下に挙げる。ただし M は剛体の質量であり、密度は均一とする。また回転軸は全て剛体の重心を通過するようになっていて、これらはすべて慣性主軸が xyz 軸である。

剛体	パラメータ	軸の向き	慣性モーメント
棒	長さ $2a$	棒に垂直	$\frac{M}{3}a^2$
長方形の板	$2a \times 2b$	面に垂直	$\frac{M}{3}(a^2 + b^2)$
		辺 $2b$ に平行	$\frac{M}{3}a^2$
直方体	$2a \times 2b \times 2c$	辺 $2c$ に平行	$\frac{M}{3}(a^2 + b^2)$
円盤	半径 a	面に垂直	$\frac{M}{2}a^2$
		面に平行	$\frac{M}{4}a^2$
球	半径 a	任意	$\frac{2M}{5}a^2$
楕円体	3 方向 a, b, c	c 方向	$\frac{M}{5}(a^2 + b^2)$
薄い球殻	半径 a	任意	$\frac{2M}{3}a^2$

これらは慣性テンソルの定義に代入することで簡単に導出できる。とはいえ、毎回導出するのも面倒である一方、すべて覚えるのも大変そうである。これを楽に覚えるには、以下の「ラウスの法則 (Routh's law)」を使うのが便利である。

$$I = \frac{M}{[3, 4, 5]}(a^2 + b^2) \quad (8.9)$$

ただし a, b は中心からの二方向の距離、分母は「長方形 (2 次元でも 3 次元でも) なら 3、楕円 (2 次元) なら 4、楕円球 (3 次元) なら 5」ととる¹¹⁷⁾。例えば円盤の場合、どちらの方向も長さは a なので、 $I = \frac{M}{4}(a^2 + a^2) = \frac{M}{2}a^2$ と求まる。また棒の場合、棒に沿った向きの長さは a 、もう一方の向きは長さ 0 なので、 $I = \frac{M}{3}(a^2 + 0^2) = \frac{M}{3}a^2$ と求まる。ラウスの法則の対象とならないのは球殻だけである (これは別個覚える必要がある)。

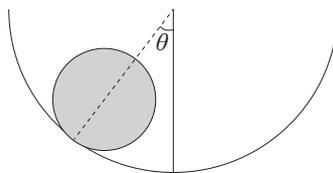


図 32: くぼんだ地面をころがり運動する球。図の横方向が x 軸、縦方向が z 軸に相当する。

[8-2] 図 32 のように、xz 面に平行に切った断面が半径 $3r$ の半円であるようなチューブ状のくぼんだ地面がある (y 方向にはこれが一様に伸びている)。ここに半径 r の一様密度、質量 M の球を入れた。球には一様重力 (重力加速度 g) が働いている。y 方向には速度や回転は一切与えなかったため、この球は y 方向には一切運動しなかった。球は常に xz 面内にあるので、以下 xz 面内の自由度だけで球を記述する。

球はこの地面の上をすべらずに転がる。そのため、この系の状態は、図 32 のように、「最下点—チューブの中心—球と地面の接点」の角度 θ (時計回りを正にとる) だけで完全に特徴づけられる。 θ の従う運動方程式を求めよ。

¹¹⁶⁾ I は実対称行列である。線形代数で習う実対称行列の一般論により、 $I\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, 3$) を満たす、互いに直交する 3 つの規格化されたベクトル \mathbf{v}_i と実数 λ_i が存在する (I は直交行列で対角化できるということ)。このとき、 \mathbf{v}_i の 3 つのベクトルを座標軸の単位ベクトルにとれば、慣性テンソルは対角項のみとなる。

¹¹⁷⁾ 分母がこのような理由は、定義に立ち返って積分をしてみると理解できると思う。これらの数の出所は、積分する際の $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ の $n+1$ である (円や球の場合は極座標変換する際に r や r^2 がでてきて、べきが変化する)。

(注：方程式を立式するまででよく、解を求める必要はない)。

8.2 オイラーの運動方程式

では一点が固定された剛体の運動方程式を導出しよう。この導出は、ラグランジアンを用いるよりも、角運動量の変化についての式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (8.10)$$

を用いた方が分かりやすい。ただし \mathbf{N} はこの剛体にかかっている固定点回りのトルクである。ここから、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ の時間発展を導く。

式 (8.10) は外部にある慣性系から見た角運動量だが、剛体の議論では「剛体に固定された座標」で見たいことが多い。実際、もし外部の慣性系から見て議論をすることになると、剛体は時々刻々向きを変えるので、慣性テンソルが時間とともに変化するという、扱いにくい状況になる。剛体に沿った座標系で運動を見ると、回転座標系での速度変換の式 (6.11) と同じ計算により

$$\dot{\mathbf{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (8.11)$$

が成り立つことが分かる。なお、以降しばらく剛体に沿った座標系を用いるので、剛体に沿った座標系の量に対してもチルダ記号は特につけていない。 $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ なので、角速度ベクトルの時間発展方程式として

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times I\boldsymbol{\omega} = \mathbf{N} \quad (8.12)$$

が得られる。特に慣性主軸を座標軸にとっている状況においては、 $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ と対角成分を書く

と、式 (8.12) は

$$I_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(I_2 - I_3) = N_1 \quad (8.13)$$

$$I_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(I_3 - I_1) = N_2 \quad (8.14)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(I_1 - I_2) = N_3 \quad (8.15)$$

という関係式となる。これは「オイラーの運動方程式」と呼ばれている。

[8-3] $I_1 = I_2 < I_3$ という一様密度の物体を考える。トルクがかかっていないときの、この物体の回転運動 ($\boldsymbol{\omega}$ の時間発展) を解け¹¹⁸。

8.3 トルクのない状況での剛体の運動

特にトルクがない状況、 $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ 、を考えよう。この設定は「オイラーのコマ (Euler's top)」とも呼ばれる。重心が固定されている場合や、剛体を放り投げて重心座標で見ている場合などがこれに相当する。

この剛体の運動は、厳密に解くことができる数少ない例でもあるが、ここでは剛体に沿った座標から見た角運動量 \mathbf{L} の時間変化¹¹⁹ を定性的に考えることにする。軸 i ($i = 1, 2, 3$) に沿った角運動量の大きさを L_i とすると、エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right) = E \quad (8.16)$$

と書ける。また角運動量の大きさ自身も保存するので、

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 \quad (8.17)$$

¹¹⁸地球はわずかに扁平で、慣性能率についてのこの問題の条件 $I_1 = I_2 < I_3$ を満たしているとみなせる。 $(I_3 - I_1)/I_1 \simeq 0.00327 \dots$ で、このとき地球の自転軸は周期 300 日ほどの振動を示すことが予想される。実際にはさまざまな要素 (地球は剛体ではなく弾性体的に振る舞う、など) により、地球の自転軸は 430 日ほどの周期の振動を示すことが観測されている。この振動は「チャンドラー極運動 (Chandler wobble)」と呼ばれる。(解説としては例えば「チャンドラー極運動の謎 - 極運動とは何か?」(https://geod.jpn.org/web-text/part3_2005/furuya/furuya-1.html) など)

¹¹⁹もちろん静止系から見ると角運動量は保存するが、剛体自身の向きが変化するので、剛体から見ると角運動量に変化していくように見える。

も成り立つ。ただし L は角運動量ベクトルの長さである。

L_1, L_2, L_3 を xyz 軸にとった三次元空間上に角運動量 \mathbf{L} の変化の軌道を描くことを考える。二つの拘束条件 (8.16), (8.17) はそれぞれ楕円球面及び球面を与えるので、両者を共に満たす点の集合は楕円球面と球面が交差した曲線であり、角運動量ベクトル \mathbf{L} はこの曲線に沿って時間変化する。これをさまざまな E, L に対してプロットしたのが図 33 である。この図は「ビネの楕円体 (Binet's ellipsoid)」と呼ばれる¹²⁰。

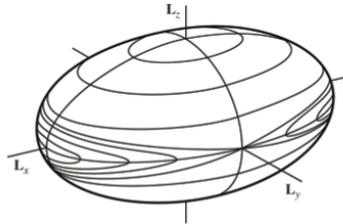


図 33: ビネの楕円体。この線上を状態は運動する。図は H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, "Classical mechanics" より引用。

この図からは、非常に重要な性質を引き出すことができる。慣性能率の大きさが $I_1 > I_2 > I_3$ という関係にあるとする。すると、1 軸 (L_1) および 3 軸 (L_3) と楕円体との交点近傍は、小さな閉軌道である (図 33 も参照。この図では L_1, L_3 は L_x, L_z である)。これは、最初の角運動量がほとんど L_1 向き、あるいは L_3 向きであれば、その後の回転軸も大体同じ向きを向いている、すなわち 1 軸周り回転と 3 軸周り回転は安定な回転である、ということの意味している。

これとは対照的なのが 2 軸 (L_2) 近傍である。初期状態がほとんど L_2 向きの場合、この軌道は非常に大きな軌道で、楕円体のほぼ真裏 (すなわち最初から 180 度ひっくり返った回転) まで動く。つまり、2 軸周り回転は不安定な回転であり、裏返りの横回転が必ず伴ってしまう。この、回転軸の安定・不安定の関係は「テニスラケットの定理 (tennis racket theorem)」として知られている¹²¹。名前の由来は、テニスラケットの場合には「グリップに沿った向きの回転の慣性能率」 < 「ラケット面を水平にしたまま、グリップを全体に回転させるような回転の慣性能率」 < 「ラケット面に垂直な向きを回転軸とする回転の慣性能率」という関係が成り立つため、2 番目の回転をさせようと思うと、必ずラケット面が裏が得るような回転も発生してしまう、ということから来ている。

なお、上では定性的な角運動量変化の性質を議論したが、角運動量の時間発展は楕円関数を用いれば解析的に解くこともできる¹²²。

¹²⁰ ちなみに角運動量ベクトル \mathbf{L} に対してではなく、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ に対して同様の議論をして図示を行うこともできる (結果は似ているが少し異なる)。このとき描かれる図形は「ポワソンの楕円体 (Poinsot's ellipsoid)」と呼ばれる。これについては、ゴールドスタイン他『古典力学 (上) 第 3 版』吉岡書店 5.6 節に解説がある。

¹²¹ NASA が宇宙ステーションでテニスラケットの定理をデモンストレーションした動画が <https://www.youtube.com/watch?v=1x5UiwEEvpQ> で見れる。

¹²² $L^2 > 2EI_2$ とする (この不等式が逆の場合は、以下の I_1 と I_3 を逆にする)。以下のように時刻を t から τ に、角運動量を L_2 から s に変換し、パラメータ $k^2 < 1$ を導入する。

$$\tau := t \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \quad s := L_2 \sqrt{\frac{(I_3 - I_2)}{I_2(2EI_3 - L^2)}}, \quad k^2 := \frac{(I_2 - I_1)(2EI_3 - L^2)}{(I_3 - I_2)(L^2 - 2EI_1)} \quad (8.18)$$

すると L_1 と L_3 を二つの保存則を用いて消去すると、 s (つまり L_2) の微分方程式は

$$\frac{ds}{d\tau} = \sqrt{(1 - s^2)(1 - k^2 s^2)} \quad (8.19)$$

となる。これは変数分離型なので、

$$\tau = \int_0^s \frac{da}{\sqrt{(1 - a^2)(1 - k^2 a^2)}} \quad (8.20)$$

と書けるが、この右辺はヤコビの楕円関数の定義そのものであり、 $s = \text{sn}(\tau, k)$ という関係が成り立つ。楕円関数は三角関数の拡張のようなものであり、加法定理などいろいろなきれいな関係式を満たす。

このあたりの詳細はランダウ、リフシッツ『力学 (増訂第 3 版)』37 章に出ている。

9 具体的な剛体の運動

この章では、剛体の具体的な運動を扱う。最初の二つの節では、二次元平面中の運動として記述できるような簡単な場合を扱う。続く節では、三次元性が顕著に表れるコマの運動を扱う。

9.1 転がり運動

図 34 のように、半径 l 、質量 M の一様密度の円筒が、角度 θ の斜面をすべらずに転がる状況を考える。外力は、重力加速度 g の一様重力がかかっているものとする。

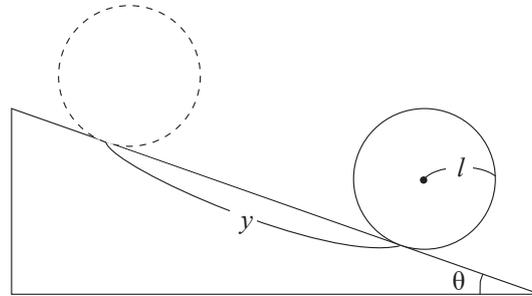


図 34: 円筒が斜面を転がる状況。

円筒の、基準点からの斜面に沿った位置を y とする。すると転がり条件により、円筒の回転速度は

$$\omega = \frac{\dot{y}}{l} \quad (9.1)$$

と書ける。そのため円筒のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ml^2}{2} \left(\frac{\dot{y}}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + Mgy \sin \theta = \frac{3M\dot{y}^2}{4} + Mgy \sin \theta \quad (9.2)$$

となる¹²³。オイラー・ラグランジュ方程式 (7.13) に代入することで、 y の運動方程式は

$$\frac{3M}{2} \frac{d^2}{dt^2} y - Mg \sin \theta = 0 \quad (9.3)$$

と求まる。これは係数の違いを除いて自由落下運動と全く同じ形なので、この微分方程式は簡単に解けて、

$$y(t) = \frac{g \sin \theta}{3} t^2 + v_0 t + y_0 \quad (9.4)$$

と運動が求まる。ただし $t = 0$ での位置と速度を y_0 と v_0 と置いた。

[9-1] 同じ質量、同じ半径、同じ高さで、表面は同じ円柱の形をした物体 1 と 2 がある。ただし物体 1 は円柱全体が一様密度、物体 2 は厚みのある円筒で、中央部分が円柱状の空洞になっていて、残りの部分は一様密度である。この二つの物体を、一様重力下、一定角度の斜面に初速・初回転を与えずに位置 A に置いたところ、どちらの物体の場合も斜面をすべらずに転がっていった。斜面の下の地点 B までより早く到達するのは物体 1、物体 2、どちらか。ただし空気抵抗などはないものとする。

9.2 剛体に対する撃力

剛体に撃力が加わる状況を考えよう。特に静止した剛体に撃力を加えたとき、剛体の各点がどのように動くか考える。

剛体の重心を G、撃力を加える点を C、剛体の質量を M 、加えた撃力(力積)を \mathbf{P} とする(図 35)。簡単のため、撃力によって生じるトルクが、ある慣性主軸に平行である状況を考える。野球のバットでバットの軸に垂直に球を打ったり、ラケットで面に垂直に球を打ったり、金槌で垂直にくぎを打ったりする状況

¹²³慣性モーメントは、ラウスの法則を用いて $I = M \frac{l^2 + l^2}{4}$ と計算した。

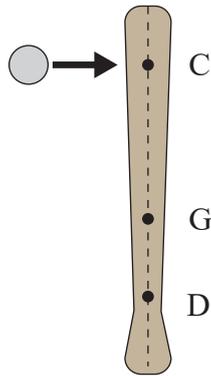


図 35: バットでボールを打つ状況の模式図。G は重心を表す。

は、この条件を満たしている。この慣性主軸の向きの慣性モーメントを I とする。すると、剛体の重心は速度 $\frac{P}{M}$ で運動し、また剛体は重心周りに慣性主軸向きの角速度 $\omega = \frac{L}{I} = \frac{r_C \times P}{I}$ の回転を始める。ただし r_C は点 G から点 C へのベクトルを表しており、以下で導入する r_D も同様とする。

このとき、点 D における剛体の速度（外部の慣性系から測る）は

$$v(r_D) = \frac{P}{M} + \omega \times r_D = \frac{P}{M} + \frac{(r_C \times P) \times r_D}{I} = \left(\frac{1}{M} + \frac{r_C \cdot r_D}{I} \right) P - \frac{r_D \cdot P}{I} r_C \quad (9.5)$$

と計算できる。ここで特に点 D の位置 r_D として、CGD がこの順で一直線上¹²⁴ かつ $r_C \cdot r_D = -\frac{I}{M}$ を満たすような点にとると、 $v(r_D) = \mathbf{0}$ 、つまり力の大きさによらずこの点 D は動かないことが分かる。この点 D を、点 C に対する「撃心 (sweet spot)」という。野球のバットやテニスのラケットで球を打つ際、打撃点の撃心に当たる点でバットやラケットを持っていれば、球を打った際に手に強い衝撃がかからないので、無理な力を使わずに球を打つことができる。また金槌でくぎを打つ場合も、金槌の頭の撃心に当たる点を持っていれば、くぎを打った際に手がじんとするのを防ぎやすい。

なお、撃心の導出過程からも分かるように、点 D が点 C に対する撃心であるならば、点 C は点 D に対する撃心である。

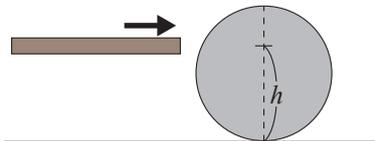


図 36: ビリヤードで、キューで水平に高さ h の点で球を突く状況。

式 (9.5) を利用して、ビリヤードのトップスピン/バックスピンを考察しよう。今は簡単のため、球を突くキューは台 (ラシャ) と水平にしている状況を考える。球の半径を r 、球を付く高さを台から h ($0 < h < 2r$) の位置とする (図 36) と、台と球の接触点における球の速度は

$$v = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{r(r-h)}{\frac{2}{5}r^2} \right) P \quad (9.6)$$

と計算できる¹²⁵。ただし M は球の質量、 P は突きによる力積の大きさと、キューで突く向きを正の向きにとった。 v は、 $h < \frac{7}{5}r$ なら正、 $h > \frac{7}{5}r$ なら負の値をとる ($h = \frac{7}{5}r$ では転がり条件が満たされ、台と球の間には摩擦は働かない)。 v が負の場合には、台と球の間の摩擦は、球の回転を減速させつつ球の重心を加速させるような向きに働く。 v が正の場合には、台と球の間の摩擦は、球の重心を減速させつつ球の回転を加速させる向きに働く。どちらの場合も、最終的には摩擦により球の回転速度と重心速度が一致し、球は正方向に転がる。

[9-2] 最終的にころがり運動する球の速度を求めよ。

¹²⁴この条件は、 $r_D \cdot P = 0$ を成り立たせるために置かれている。

¹²⁵分母は球の慣性モーメントである。

v が正の場合には、球は逆回転（バックスピン）した状態で進む場合もある¹²⁶。特にこの状況で別の球に衝突した場合、球の回転はそのままのに対し球の運動量は丸ごと衝突先の球に受け渡される。すると最初に打った球は衝突後に自分の方に戻ってくる。これはビリヤードではドロショットと呼ばれるものである¹²⁷。

9.3 コマの歳差運動と章動

ここでは、重心ではない一点が固定された対称なコマの一樣重力下の運動を解析しよう。特に、 $I_1 = I_2 \neq I_3$ であり、 I_3 の慣性主軸上の一点が固定されているものとする。これは「ラグランジュのコマ (Lagrange's top)」とも呼ばれる。典型例は一点で地面に接する軸対称なコマである。

今回の設定の場合、座標系は剛体に固定されたものではなく、コマの外部に固定されたものを用いた方がよい¹²⁸。特に、固定点を原点とした対称軸の向きの極座標 (θ, ϕ) と、対称軸周りの回転角 ψ の3変数で状態を指定する¹²⁹ ことにする (図 37)。 ϕ 方向の軸の回転をコマの「歳差運動¹³⁰ (precession)」、 θ 方向の軸の振動をコマの「章動 (nutation)」という¹³¹。

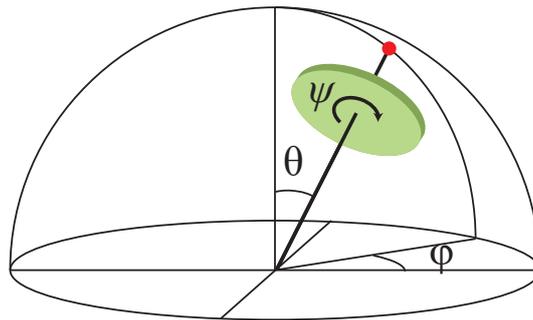


図 37: 一点が固定されたコマの運動の解析における座標の設定。回転軸に対する極座標 (θ, ϕ) と、回転軸周りの剛体の回転角 ψ の3変数で状態が指定できる。

ϕ 方向回転が I_1 軸と I_3 軸が混ざり合う向きであることに気を付けると、この系の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_1(\dot{\phi}\sin\theta)^2 + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 \quad (9.7)$$

と書けることが分かる¹³²。コマの質量を M 、固定点から重心までの距離を l とすると、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 - Mgl\cos\theta \quad (9.8)$$

と書ける。見ると明らかなように、ラグランジアンは ψ および ϕ を陽に含んでいない¹³³。そのため、オイラー・ラグランジュ方程式より、

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \quad (9.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1\dot{\phi}\sin^2\theta + I_3\dot{\phi}\cos^2\theta + I_3\dot{\psi}\cos\theta \quad (9.10)$$

¹²⁶ v が正であっても、球の回転速度よりも球自身の運動速度の方が速ければ、バックスピンにはならない。

¹²⁷逆に、真横から打っている限り、他の球に当たらずに球が手元に戻る方向に運動することは出来ない。そういう運動をさせたいならば、マッセッション (キューを上から下に突き下ろすようにして球を打つ方法) などのような、運動量をあまり与えずに角速度だけを大きく与えるショットをする必要がある。

¹²⁸例えばコマの歳差運動や章動は外部から見て分かりやすく捉えられるものであり、剛体に固定された座標系では議論しづらい。

¹²⁹このような角度の指定方法を「オイラー角 (Euler angle)」という。

¹³⁰「首振り運動」「みそすり運動」「すりこぎ運動」などとも呼ばれる。

¹³¹歳差運動は普段のコマ遊びで簡単に観察できるが、章動はなかなか見えにくい。「コマの歳差運動のシミュレーション」<https://www.youtube.com/watch?v=z kwa 0 ebx j j U> では、章動を含めたコマのシミュレーション動画が見れる。

¹³² $I_1 = I_2$ なので、 x 軸から ϕ だけ回転したところを 1 軸にとることができる。そうすると θ の変化は純粋な 2 軸周りの回転とみなせる。一方、 θ による傾きがあるため、 ϕ の変化は 1 軸周りと 3 軸周りの回転が混ざり合ったものになる。

¹³³解析力学で「陽に含む」と言った場合、 $\dot{\phi}$ のような時間微分項や、 θ を介して ϕ 依存性を持つといった効果は考えず、「 ψ や ϕ の文字がそのまま含まれている」ということを意味する。

の2つの量が時間変化しない保存量であることが直ちにわかる。保存量として、上記の二つを I_1 で割った値

$$A := \frac{I_3}{I_1}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad (9.11)$$

$$B := \dot{\phi} \sin^2 \theta + \frac{I_3}{I_1}(\dot{\phi} \cos^2 \theta + \dot{\psi} \cos \theta) \quad (9.12)$$

を導入しておこう。これらの値は初期状態にのみ依存して決まる量である。

A, B が決まれば、 $\dot{\psi}$ と $\dot{\phi}$ を消去して、 θ のみの運動方程式に変形することができる。式 (9.11) より $\dot{\psi} = \frac{AI_1}{I_3} - \dot{\phi} \cos \theta$ であり、これを式 (9.12) に代入して整理すると

$$\dot{\phi} = \frac{B - A \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad (9.13)$$

が得られる。全エネルギー $E = K + U$ もまた保存量なので、

$$E - \frac{I_1^2 A^2}{2I_3} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{I_1 (B - A \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (9.14)$$

は保存する¹³⁴。ちなみにこれは、有効エネルギー E_{eff} と有効ポテンシャル $U_{\text{eff}}(\theta)$ を

$$E_{\text{eff}} := E - \frac{I_1^2 A^2}{2I_3} \quad (9.15)$$

$$U_{\text{eff}}(\theta) := \frac{I_1 (B - A \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta \quad (9.16)$$

と定義すれば、

$$E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}}(\theta) \quad (9.17)$$

と等価なので、 θ は一次元の運動として完全に理解可能である¹³⁵。

見通しをよくするために、さらに $u = \cos \theta$ という変数変換をする。この変数変換の下で式 (9.14) を整理すると

$$\dot{u}^2 = (1 - u^2)(C - Du) - (B - Au)^2 \quad (9.18)$$

となる。ただしここで

$$C := \frac{2E_{\text{eff}}}{I_1} = \frac{2E}{I_1} - \frac{I_1 A^2}{I_3} \quad (9.19)$$

$$D := \frac{2Mgl}{I_1} \quad (9.20)$$

と置いた。右辺は3次関数なので、これは楕円関数を用いて解析的に解くことができる¹³⁶ が、それよりも定性的な振る舞いを理解する方が有意義であろう。

式 (9.18) 右辺を $f(u)$ と置くと、 $u = \cos \theta$ かつ $\dot{u} = \sqrt{f(u)}$ より、物理的な運動は $-1 \leq u \leq 1$ の区間中の $f(u) \geq 0$ の領域が対応する。一方、 $A \neq \pm B$ ならば¹³⁷ $f(\pm 1) < 0$ であり、 $f(u)$ は $D > 0$ より u が大きい状況で正に発散するので、 $f(u) = 0$ は $-1 \leq u \leq 1$ の区間中に図 38 のように二つの実解 u_1, u_2 を持ち、

¹³⁴後の計算の都合で、 $\frac{I_1^2 A^2}{2I_3}$ を左辺に移した。

¹³⁵この辺は、5章で中心力ポテンシャル中の運動を、動径方向のみの有効記述で議論したのと似ている。

¹³⁶右辺の因数分解を $D(u-a)(u-b)(u-c)$ と置く（三次方程式は解の公式があるので、 $A \sim D$ を用いて a, b, c を書き下すこともできる）。このとき、変数変換

$$s = \sqrt{\frac{u-a}{b-a}} \quad (9.21)$$

を行うと、 $k := \sqrt{(b-a)/(c-a)}$ を用いて

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{D(u-a)(u-b)(u-c)}} = \frac{2}{\sqrt{D(c-a)}} \int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} \quad (9.22)$$

となり、解は脚注 122 で見たのと同様に楕円関数で記述できることが分かる。

¹³⁷ $A = \pm B$ の場合は、後の補論にて取り扱う「眠りゴマ」の状況に相当する。

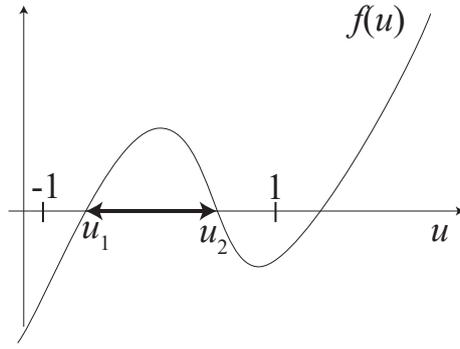


図 38: $f(u)$ の概形。

この二つの実解の間の領域で u の往復運動が生じることが分かる。これが θ 方向の運動、すなわち章動である。

歳差運動を考察するには、 u (つまり θ) と ϕ の間の関係を明らかにする必要がある。式 (9.13) を u を用いて書くと

$$\dot{\phi} = \frac{B - Au}{1 - u^2} \quad (9.23)$$

である。分母 $1 - u^2$ は常に正なので、 $B - Au$ の正負が ϕ の運動の向きを定める。 $\frac{B}{A}$ が区間 (u_1, u_2) の外にある場合、図 39(a) のように u の値によらず ϕ は一方向に回転する。 $\frac{B}{A}$ が区間 (u_1, u_2) 中にある場合、 u が $u = \frac{B}{A}$ を横切るときに ϕ は回転の向きを変える。この場合の運動の様子は図 39(b) のようになり、一部で逆方向の運動が生じる。最後に、 u_1 または u_2 が $\frac{B}{A}$ とちょうど一致する場合には、図 39(c) のように軸の軌道は尖点を持つ。

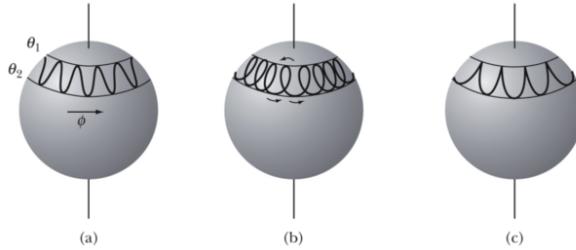


図 39: 歳差運動及び章動の運動の軌道。(a): 一方向に動く歳差運動。(b): 途中で逆方向にも動く歳差運動。(c): 尖点を持つ歳差運動。画像は「The Spinning Top Chloe Elliott Rigid Bodies Distance」<https://slidetodoc.com/the-spinning-top-chloe-elliott-rigid-bodies-distance/> より引用。

最後の状況は例外的にも思えるが、初期状態として、軸が傾いていてかつ軸の初速度はゼロ ($\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0, \psi_0 \neq 0$) という自然な状況設定を考えると、これは最後の状況に相当する。ただし下付き添え字の 0 は初期状態の値を意味する。このときには $\dot{u}_0 = 0$ より $f(u_0) = 0$ とならないといけないが、今の設定では $A = I_3 \dot{\psi}_0 / I_1$ 、 $B = I_3 \dot{\psi}_0 u_0 / I_1$ であり、 $\frac{B}{A} = u_0$ となり、確かに最後の状況に該当する (このとき $u_0 = u_2$ である)。

軸の初速度ゼロ ($\dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$) で、さらにコマの回転が非常に速い ($\frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2 \gg Mgl$) 状況は、運動の解析がしやすい。初速度ゼロ条件から $E_{\text{eff}} = Mgl \cos \theta_0$ が得られるので、 $C = Du_0$ が成り立つ。これと直前に見た $B = Au_0$ とを組み合わせると、

$$f(u) = (u_0 - u)[(1 - u^2)D - A^2(u_0 - u)] \quad (9.24)$$

と因数分解できる。 $u = u_0$ ($= u_2$) 以外の $f(u) = 0$ の解 u_1 を導こう。コマの回転が速いという仮定より

$$\frac{D}{A^2} = \frac{2I_1 Mgl}{I_3^2 \dot{\psi}_0^2} \ll 1 \quad (9.25)$$

が成り立つ¹³⁸。章動の幅を $x_1 := u_0 - u_1$ として、 x_1 を微小量 $\frac{D}{A^2}$ の最低次で評価すると

$$x_1 = (1 - u_0^2) \frac{D}{A^2} + O\left(\left(\frac{D}{A^2}\right)^2\right) = \frac{2(1 - u_0^2)I_1 Mgl}{I_3^2 \dot{\psi}_0^2} + O\left(\left(\frac{D}{A^2}\right)^2\right) \quad (9.26)$$

と求まる。これは、コマの回転速度 $\dot{\psi}_0$ の 2 乗に反比例して、章動の幅が小さくなることを意味している。

速いコマでは章動の速さ（振動数）も推定できる。すでに導いたように、速いコマでは u （すなわち θ ）はほとんど変化しない。そのため、 $1 - u^2 \simeq \sin^2 \theta_0$ という近似がよい精度で成り立つ。 $x := u_0 - u$ と変数を取り直すと、 x の時間発展は

$$\dot{x}^2 = -A^2 x^2 + \sin^2 \theta D x \quad (9.27)$$

与えられる。両辺を t で微分して \dot{x} で割ると

$$\ddot{x} = -A^2 x + \frac{1}{2} \sin^2 \theta D \quad (9.28)$$

と、中心が $x = \sin^2 \theta D / 2A^2$ の単振動そのものとなる。よって x の振動数は

$$A = \frac{I_3 \dot{\psi}}{I_1} \quad (9.29)$$

と求まる。つまり、章動の振動数は、コマの回転が速ければ早いほど、それに比例して速くなる。

最後に歳差運動の速度も計算しておこう。得られた結果と $1 - u^2 \simeq \sin^2 \theta_0$ という近似を式 (9.23) に代入すると

$$\dot{\phi} = \frac{I_3 \dot{\psi}}{I_1 \sin^2 \theta_0} x \simeq \frac{I_3 \dot{\psi}}{I_1 \sin^2 \theta_0} \frac{(1 - u_0^2) I_1 Mgl}{I_3^2 \dot{\psi}_0^2} = \frac{Mgl}{I_3 \dot{\psi}} \quad (9.30)$$

となり、コマの回転速度に反比例して歳差運動の速度は遅くなることが分かる。ただし途中の \simeq では、 x の代表的値として章動の中心の値 $\frac{x_0}{2}$ を用いた。

ここでの結果は、速い回転のコマでは章動はほとんど見ることができないという観察事実とも合致している。コマについての大雑把な説明では、章動については議論せず、コマがいきなり歳差運動し始めるかのように書いている本も少なくない。実際、速いコマでは章動は非常に小さくかつ速いので肉眼ではほとんど見えない。しかし、章動を無視してしまうと、コマに鉛直方向の力がかかっているにもかかわらず、それとは垂直な向きにコマが回転する、という、いささか奇妙な現象が起きていることになる。実際には、コマは確かに鉛直方向にわずかに動くのだが、すぐに鉛直方向の下降運動は止まって元の高さまで戻るような上下振動（章動）を確かに行っているのである。しかしこの高速微小振動は肉眼ではほとんど確認できず、ゆっくりした歳差運動だけが起きているように見えるのである。

9.4 <補論>：眠りゴマと起き上がりゴマ

まず、 $\theta = 0$ 、すなわちコマが完全に垂直に立っている状況の安定性を調べよう。この場合の $f(u)$ は、 $A = B = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi})/I_1$ 、 $C = D = 2Mgl/I_1$ が成り立つので

$$f(u) = [C(1 + u) - A](1 - u)^2 \quad (9.31)$$

と書ける。 $u = 1$ は重解であり、それ以外の解が $u_3 = \frac{A}{C} - 1$ である。ここで $u_3 > 1$ の場合は、 $f(u)$ は図 40 上のような形となり、この場合は（外部からの微振動などで） u が 1 より小さくなったとしても、 $f(u)$ は図 40 上右のように変化するので、 u の値は 1 から離れていかない¹³⁹。このように、軸が垂直な状態で安定に回っているコマを「眠りゴマ」という。一方 $u_3 < 1$ の場合は、 $f(u)$ は図 40 下のような形となり、これは u が少しでも 1 より小さくなると一気に $u = u_3$ まで値が減ってしまう不安定な状態である。垂直な軸が安定である条件 $u_3 > 1$ は

$$I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}) > 4Mgl \quad (9.32)$$

¹³⁸ I_1 が I_3 より極端に大きい状況（細長い棒のような状況がこれに相当する）はここでは排除している。

¹³⁹ 一点が固定されたコマ＝軸が細いコマの場合には、これ以上の変化は起きない。だが、軸が太いコマの場合には、後述するような起き上がりの効果も発生し、そうすると u の値は 1 に戻る。つまり、垂直に回っている状態が安定であり、そこからずらすような振動がかかっても、垂直に戻すような復元力が発生する。

と書ける。なので、コマの回転 $\dot{\psi}$ が速い場合には垂直な状況が安定であり、コマの回転が遅くなって $I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi}) < 4Mgl$ となるとコマは倒れ始める。

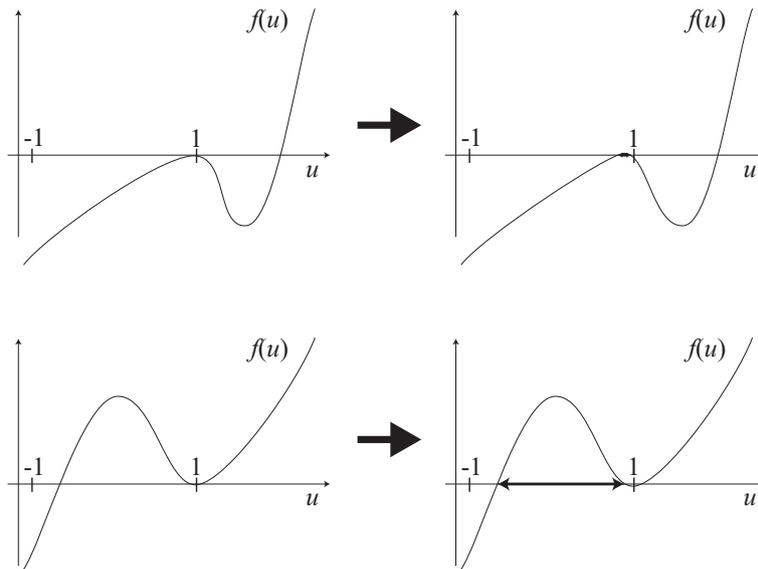


図 40: コマが垂直 ($\theta = 0$) に立っている状況の $f(u)$ の模式図。上は $\theta = 0$ が安定な場合、下は $\theta = 0$ が不安定な場合に対応する。右は摂動を加えた状況を表している。

コマについてのさらに不思議な現象として、コマの起き上がりという現象がある¹⁴⁰。これは、地面との間の摩擦の効果で、コマの重心が最初よりも高い位置に動く現象である。一見すると極めて奇妙な現象だが、逆立ちゴマなど、軸が有限の太さを持つコマで実際に見ることができる。ここではややラフな議論で、その振る舞いを理解しておこう。

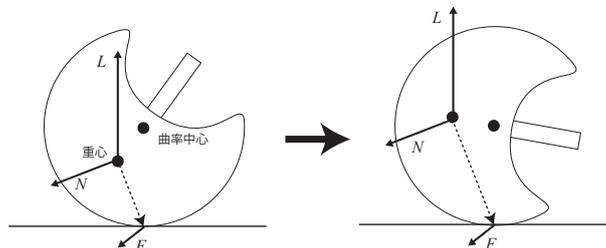


図 41: 起き上がりゴマにおいて働く力とトルクの模式図。

逆立ちゴマの形は図 41 のようにほぼ球だが、重心は中心よりも下の位置にある。ほとんど球なので、3つの慣性モーメントはすべて同一の値 I をとるとみなせる。コマの回転は非常に速い状況を考える。回転が非常に速いので、摩擦を受けた後でもコマの角運動量 L の向きはほとんど変化しない。特に最初にコマをほぼ垂直にして回転させ始めたとする、 L はずっと地面と垂直な向きだとみなすことができる。

図 41 左のようにコマが傾いたとする。すると、重心を通る角運動量ベクトル L より右側の部分は奥向きに、それより左側の部分は手前向きに動く。特に、コマと地面の接点においては、コマは奥向きに動くので、摩擦力 F は手前向き、重心から見た摩擦によるトルク N は左向きに働く。今は慣性テンソルがほぼ等方的なので、角速度 ω と角運動量 L はほぼ平行とみなすことが出来、そのため剛体に固定された座標から見た角運動量の変化は式 (8.11) より

$$N = \frac{d}{dt}L = \dot{L} + \omega \times L \simeq \dot{L} + \omega \times I\omega = \dot{L} \quad (9.33)$$

¹⁴⁰起き上がりゴマの振る舞いは、「起き上がりゴマ?」<https://www.youtube.com/watch?v=taMNDbtVX4U> で動画が見れる。同様に、ゆで卵を回転させても重心を上にはらせることができる(「spinning a boiled egg on its side」<https://www.youtube.com/watch?v=1574V0CKUIg>)。ここでの説明は定性的なものであったが、定量的な解析は江沢洋、中村孔一、山本義隆『演習詳解 力学(第2版)』筑摩書房の問題 6-24 に詳しい議論が出ている。

と、トルクの向きにそのまま角運動量ベクトルが変化する。これは剛体に固定された座標系から見て、角運動量ベクトル \mathbf{L} を左に傾けようとする、つまりコマが起き上がる¹⁴¹ ことが分かる¹⁴²。特に起き上がりゴマの立ち上がりの速度は $\dot{\theta} = \frac{N}{L}$ だと分かる¹⁴³。

¹⁴¹外部に固定された座標から見ると角運動量ベクトル \mathbf{L} は変化しないので、剛体に固定された座標系から見て角運動量ベクトルが左に動くには、コマ自体が右向きに回転するしかない。

¹⁴²外部に固定された座標の場合には、コマが回転するのに従って \mathbf{N} の向きも回転するので、これを時間平均するとゼロとなり、外部から見ていると角運動量 \mathbf{L} は変化しない。

¹⁴³普通の逆さゴマだと、 $r \simeq 1.5\text{cm}$ ほど、摩擦係数 $\mu = \frac{1}{4}$ 、初期の角速度は大体 1 秒当たり 30 回転ぐらいと見積もって計算すると、逆立ちにかかる時間は 2 秒ほどと出てくる。これは実際の逆さゴマの逆立ちにかかる時間 2～3 秒とよく一致する。

10 ハミルトン形式

ここまで、ラグランジュ形式による力学の取り扱いを見てきた。ここでは、それとは異なる「ハミルトン形式」の力学を考えよう。具体的な物体の運動を解くという点では、ラグランジュ形式ですでに十分かもしれないが、力学の一般的な性質、構造を明らかにする上では、ハミルトン形式の方が便利である¹⁴⁴ため、ここではハミルトン形式を導入しその性質を議論しよう¹⁴⁵。

この講義では、多くの教科書と同様に、ラグランジュ形式を既知として、それを出発点にしてハミルトン形式を構築する¹⁴⁶。なお、以下では運動方程式が（つまりラグランジアンやハミルトニアンが）時間依存しない状況に限定して取り扱う。

10.1 ハミルトニアンとハミルトンの運動方程式

ラグランジュ形式では、配位空間の一般化座標 \mathbf{q} を用いて系を記述していた。 d 次元空間中の n 粒子系の場合、配置の自由度は $N = dn$ であり、変数 $= \mathbf{q}$ の次元も N であった。これに対しハミルトン形式では、一般化座標 \mathbf{q} に加えて一般化運動量 \mathbf{p} の $2N$ 個の変数の組 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) で状態を指定する。1章で見たように、物体の位置と速度が指定されれば未来の運動は完全に定まるので、変数が $2N$ 個あれば状態が完全に指定できる。

一般化運動量 p_i は、ラグランジアン L の \dot{q}_i 微分

$$p_i := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (10.1)$$

で与えられる。特に \mathbf{q} として直交座標系を用いた場合には、一般化運動量 p_i は通常の運動量 $m\dot{q}_i$ に一致する。ただし一般の場合にはこうはならない。例えば2次元平面中の1粒子系で極座標を用いた場合には、 $(q_1, q_2) = (r, \theta)$ とすると、 $L = \frac{1}{2}(m\dot{q}_1^2 + m\dot{q}_1^2\dot{q}_2^2) - U(q_1, q_2)$ なので、

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 \quad (10.2)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m\dot{q}_1^2\dot{q}_2 \quad (10.3)$$

となる。一般の場合にはもっと複雑な形となる。

(\mathbf{q}, \mathbf{p}) を座標とする空間を「相空間 (phas space)」という。系の状態は相空間上の一点で表される。系の時間発展は、相空間内の点の軌跡として表される。

次に、ハミルトン形式で中心的な役割を果たす「ハミルトニアン (Hamiltonian)」 H という関数を導入しよう。ハミルトニアンは、ラグランジアン L に対する「ルジャンドル変換 (Legendre transformation)」として得られる関数なので、まずルジャンドル変換が何なのかを見ることにする。

ルジャンドル変換は、ある変数の凸関数 $f(x)$ を、別の変数 a の凸関数 $g(a)$ に変換する数学的操作である。簡単のため、 $f(x)$ には特異性がない¹⁴⁷ とする、このとき、関係式 $a = \frac{df(x)}{dx}$ を x について解いた関数を $x(a)$ とすると、 $f(x)$ のルジャンドル変換 $g(a)$ は

$$g(a) := ax(a) - f(x(a)) \quad (10.4)$$

で定義される¹⁴⁸。これを見ると分かるように、 a は f の微分 (傾き) 相当の量であることが分かる。多変

¹⁴⁴また古典力学から量子力学を得る際にも、ハミルトン形式を用いた方が見通しが良い。

¹⁴⁵ハミルトン形式は、解析力学の教科書で解説されている。例えば井田大輔『現代解析力学入門』朝倉書店、大貫義郎『解析力学』岩波書店など。

¹⁴⁶いきなりシンプレクティック構造から定義することもできるが、その方法では物理的な直感がほとんど働かないと思うので、その方法は採用しない。ただしラグランジュ形式を経由しなくてもハミルトン形式を構成できる、という事実だけはここでコメントしておく。

¹⁴⁷より具体的には、 f は微分可能で、 f の導関数は連続かつ狭義単調増大としている。

¹⁴⁸一般の場合のルジャンドル変換は、

$$g(a) := \max_x [ax - f(x)] \quad (10.5)$$

で定義される。この意味は、図 42 を見るとわかりやすい。 $ax - f(x)$ は、 $y = ax$ と $y = f(x)$ との間の y 方向の距離を表している。これが最大化されるのは、 $f(x)$ の傾きがちょうど a になる点である (図 42)。

式 (42) で与えられる定義は、 $f(x)$ に微分不可能な点があったり、傾き一定の部分を含んでいたりすると数学的には well-defined でなくなる。上記の一般的な定義はそのような場合にも適用可能である。ルジャンドル変換は熱力学でも「エネルギー→ヘルムホルツ自由エネルギー→ギブス自由エネルギー」と構成する際に必要となる数学的操作だが、熱力学の重要な対象である相転移点におい

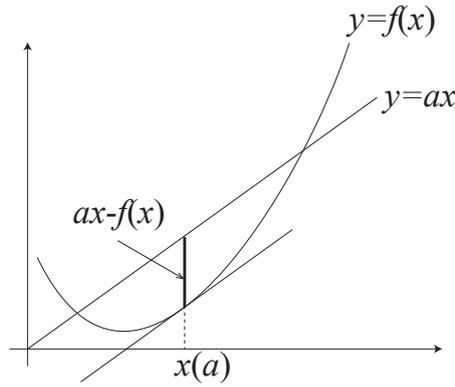


図 42: ルジャンドル変換のイメージ図。 $y = ax$ と $y = f(x)$ の間の距離（太線部）の最大値が $f(x)$ のルジャンドル変換 $g(a)$ である。

数の場合のルジャンドル変換は、 $a_i = \frac{df(\mathbf{x})}{dx_i}$ に対し

$$g(\mathbf{a}) = \sum_i a_i x_i(\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}(\mathbf{a})) \quad (10.6)$$

で定義される。

ハミルトニアン $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ は、ラグランジアン $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ に対する $\dot{\mathbf{q}}$ のルジャンドル変換¹⁴⁹ として定義される。

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \sum_i p_i \dot{q}_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) \quad (10.7)$$

例として、1次元空間中を運動する2つの粒子の系で、 $q_i = x_i$ と取っている場合を考えよう。このとき $L = \frac{1}{2}(m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2) - U(q_1, q_2)$ なので、 $\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i}$ がすぐに得られ、ハミルトニアンは

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_1 \frac{p_1}{m_1} + p_2 \frac{p_2}{m_2} - \left[\frac{1}{2} \left(m_1 \left(\frac{p_1}{m_1} \right)^2 + m_2 \left(\frac{p_2}{m_2} \right)^2 \right) - U(q_1, q_2) \right] = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + U(q_1, q_2) \quad (10.8)$$

となる。また別の例として、2次元平面中の1粒子系の場合を考えよう。このときは $L = \frac{1}{2}(m \dot{q}_1^2 + m q_1^2 \dot{q}_2^2) - U(q_1, q_2)$ で、一般化運動量はすでに式(10.2)、(10.3)で求めた通りで、 $\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m}$ 、 $\dot{q}_2 = \frac{p_2}{2m q_1^2}$ なので、これらを代入すると

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p_1 \frac{p_1}{m} + p_2 \frac{p_2}{2m q_1^2} - \left[\frac{1}{2} \left(m \left(\frac{p_1}{m} \right)^2 + m q_1^2 \left(\frac{p_2}{2m q_1^2} \right)^2 \right) - U(q_1, q_2) \right] = \frac{p_1^2}{m} + \frac{p_2^2}{2m q_1^2} + U(q_1, q_2) \quad (10.9)$$

となる。

どちらの場合もハミルトニアンは系のエネルギーそのものである。実はこれは一般的に成り立つ性質である。運動エネルギー K は二次形式の形

$$K = \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (10.10)$$

ては、関数が特異的になるので、この脚注で述べたような一般的定義が必要となる。このあたりは、田崎晴明『熱力学 現代的な視点から』培風館付録H、同『統計力学II』培風館付録B、清水明『熱力学の基礎I 第2版』東京大学出版会第12章、などを参照していただきたい。(なお、ルジャンドル変換の定義における符号が、熱力学と力学とは慣習的に逆になっているので、両者を並行して学ぶ際には注意していただきたい)。

¹⁴⁹ラグランジアンは、引数 $\dot{\mathbf{q}}$ について下に凸な関数であるため、ルジャンドル変換が実行できる。凸であることは以下のように示せる。まず直交座標系を用いている場合には、 $L = \sum_i \frac{\dot{q}_i^2}{2m_i} - U(\mathbf{q})$ なので、各 \dot{q}_i について明らかに凸である。 \mathbf{q} が別の座標系 \mathbf{q}' に変換された際、 $\dot{\mathbf{q}}$ から $\dot{\mathbf{q}}'$ への変換は局所的に見れば線形変換であり、線形変換は関数の凸性を変えない。よって新しい座標系 \mathbf{q}' の下でも、ラグランジアンは相変わらず凸であるといえる。

で書かれている¹⁵⁰ので、一般化運動量とハミルトニアンはそれぞれ

$$p_i = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = 2 \sum_j a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_j \quad (10.12)$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_i p_i \dot{q}_i - K + U = 2 \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - K + U = K + U \quad (10.13)$$

と計算でき、ハミルトニアンは系の全エネルギー $K + U$ と一致する。

ラグランジュ形式の場合、変数の時間発展はオイラー・ラグランジュ方程式で与えられた。ハミルトン形式の場合、変数の時間発展は以下の「ハミルトンの方程式 (Hamilton's equation)」で与えられる。

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (10.14)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (10.15)$$

以下これを導出しよう。式 (10.15) は、以下のように定義から直接導ける。

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{\partial p_i} = \dot{q}_i + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{q}_i \quad (10.16)$$

式 (10.14) を導くため、まず H の q_i 微分が

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial q_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = -\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} \quad (10.17)$$

となる¹⁵¹ことに注意する。これとオイラー・ラグランジュ方程式 (7.13) を組み合わせると、

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i} = -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{dp_i}{dt} \quad (10.18)$$

となり、求めたかった関係式が得られる。

時間発展が式 (10.14), (10.15) で与えられる系を「ハミルトン系 (Hamiltonian system)」という¹⁵²。力学で取り扱う散逸のない系は、基本的にハミルトン系である。

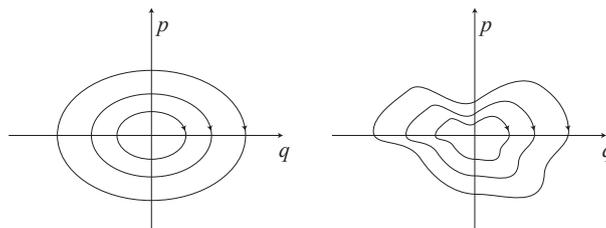


図 43: 左: 単振動の場合のとりうる軌道。右: ポテンシャルが複雑になった場合の 1 次元運動の相空間ととりうる軌道の例。

¹⁵⁰ 直交座標系から一般の座標系への変換 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'$ において、運動エネルギーの部分は

$$\left(\frac{d}{dt} q_i(\mathbf{q}') \right)^2 = \left(\sum_j \frac{\partial q_i(\mathbf{q}')}{\partial q'_j} \frac{dq'_j}{dt} \right)^2 = \sum_{j,k} \left(\frac{\partial q_i(\mathbf{q}')}{\partial q'_j} \frac{\partial q_i(\mathbf{q}')}{\partial q'_k} \right) \dot{q}'_j \dot{q}'_k \quad (10.11)$$

となるので、運動エネルギーは $\dot{\mathbf{q}}$ について二次形式である。

¹⁵¹ 左から 2 番目の式の $\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))}{\partial q_i}$ は L を (\mathbf{q}, \mathbf{p}) の関数だと見た際の q_i 微分、左から 3 番目の式の $\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial q_i}$ は L を $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ の関数として表した際の q_i 微分であり、意味が異なる点に注意。

¹⁵² 数学の「力学系 (dynamical system)」の分野では、一般的な時間発展方程式で記述されるような状況を考えているので、式 (10.14), (10.15) の形で書かれるとは限らない。そのため式 (10.14), (10.15) で書かれる系に個別の名前がついている。

ハミルトン形式では、ある初期状態からの運動は相空間中の一本の曲線として表すことができる。例えば単振動 $H = p^2/2m + kq^2/2$ の系における運動の軌道は、図 43 の左のような閉曲線として描ける。軌道同士は交差しないので、軌道の概形はこのようなものしかありえない。 $H = p^2/2m + U(q)$ のようにポテンシャルを複雑にしても、軌道がゆがむだけで定性的には同じような運動をすることが分かる。

10.2 ポアソン括弧と正準変換

ハミルトン形式における重要な演算である「ポアソン括弧 (Poisson bracket)」を導入しよう。ポアソン括弧は、2つの (\mathbf{q}, \mathbf{p}) を引数に持つ関数から、1つの関数を作る演算 (積) である。関数 f と g のポアソン括弧は

$$\{f, g\} := \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (10.19)$$

で定義される。

一見すると何のために導入したのかよく分からない演算だが、実はポアソン括弧はハミルトン形式を特徴づける非常に重要な演算である。まず、ポアソン括弧を用いると、 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) を引数に持つ関数 A の時間発展は

$$\frac{d}{dt} A = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) = \{A, H\} \quad (10.20)$$

と簡潔に表せる¹⁵³。

ポアソン括弧は以下の関係を満たす¹⁵⁴。ただし f, g, h は関数、 c は実数である。

1. 歪対称性 : $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. 線形性 : $\{f + cg, h\} = \{f, h\} + c\{g, h\}$
3. ライプニッツ則 : $\{f, gh\} = h\{f, g\} + g\{f, h\}$
4. ヤコビ律 : $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
5. 非退化性 : 任意の f について $\{f, g\} = 0$ ならば、 g は定数関数。

証明は直接定義を代入することで確認できる¹⁵⁵。

一般化座標と一般化運動量の組 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) を、別の組 $\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に変換することを考えよう。ラグランジュ形式の際には、座標を任意の別の座標に移す「点変換 (coordinate transformation あるいは point transformation)」 $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}'$ を考えた。今回はこれをさらに一般化し、新しい一般化座標 \mathbf{Q} は、元の表示での一般化座標 \mathbf{q} のみならず一般化運動量 \mathbf{p} も用いてよいものとする。位置 (座標) が普通の意味での運動量を含むというのは、一見すると単なる数学的な形式的拡張で物理的には意味がないように見えるかもしれないが、例えば保存量がある系において保存量を新たな変数に取り直したい際には、この一般化された変数変換が必要になる。

ただしどんな変換でも許されるわけではなく、ハミルトン形式の「構造」を維持するような変数変換に限定して考えたい。この「維持されるべき構造」というのが、実はポアソン括弧である。変数変換 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ で、任意の関数 f, g についてポアソン括弧が不変

$$\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{f, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} \quad (10.21)$$

となるものを「正準変換 (canonical transformation)」と呼ぶ。ただし $\{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$ は通常の変数 \mathbf{q}, \mathbf{p} によるポアソン括弧であり、 $\{f, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}}$ は、 f と g を変数 \mathbf{Q}, \mathbf{P} の関数

$$f(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = f(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) \quad (10.22)$$

$$g(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = g(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) \quad (10.23)$$

¹⁵³より一般に、 L がある変換の推進をする関数である場合、 $\{A, L\}$ はその変換の方向への微分を与える。ハミルトニアンは時間推進演算子でもあるので、ポアソン括弧で時間微分が得られた。

¹⁵⁴一般の相空間上のポアソン括弧は、逆にこれら 1-5 の性質を満たす積として定義される。

¹⁵⁵ただしヤコビ律だけは計算を工夫しないと相当煩雑になる。

として表した場合の変数 \mathbf{Q}, \mathbf{P} によるポアソン括弧

$$\{f, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} := \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} \right) \quad (10.24)$$

である。正準変換で互いに移り合える¹⁵⁶ 変数の組は「正準変数 (canonical variable)」と呼ぶ。物理量の時間発展が、その物理量とハミルトニアンとの間のポアソン括弧で書かれたことを思い出せば、正準変換はハミルトンの運動方程式で与えられる系の時間発展を不変に保つことが分かる。

ある変換が正準変換か否かを判定するのに、「任意の関数 f, g 」についての演算を調べるのでは非常に大変である。しかし幸いなことに、ある変換が正準変換か否かを簡単に判定する方法が知られている。変数変換 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ が正準変換である必要十分条件は

$$\{Q_i, P_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \delta_{ij}, \quad \{Q_i, Q_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0, \quad \{P_i, P_j\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = 0 \quad (10.25)$$

が成り立つことである。必要条件であることは明らかなので、十分条件であることを確認しよう。式 (10.25) が満たされているとすると、 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) のポアソン括弧は、以下のように変形することで (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) のポアソン括弧と一致することが示せる。

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \\ &= \sum_i \left[\left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial q_i} \right) \left(\sum_k \frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial p_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_j \frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial P_j}{\partial p_i} \right) \left(\sum_k \frac{\partial g}{\partial Q_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial g}{\partial P_k} \frac{\partial P_k}{\partial q_i} \right) \right] \\ &= \sum_{j,k} \left[\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \{Q_j, Q_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial P_k} \{P_j, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} + \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_k} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_k} \right) \{Q_j, P_k\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \right] \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial Q_j} \frac{\partial g}{\partial P_j} - \frac{\partial f}{\partial P_j} \frac{\partial g}{\partial Q_j} \right) \\ &= \{f, g\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} \end{aligned} \quad (10.26)$$

よってある変換が正準変換かどうかを知りたいければ、式 (10.25) を確認すれば十分であることが分かる。

正準変換の別の必要十分条件として、母関数の存在もよく用いられる。もし、 \mathbf{q} と \mathbf{Q} の関数 $W(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ が存在し、

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (10.27)$$

$$P_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} \quad (10.28)$$

が成り立つならば、 $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ は正準変換である¹⁵⁷。 \mathbf{Q} と \mathbf{P} の役割は入れ替えてもよく、別の母関数 $W(\mathbf{q}, \mathbf{P})$ が存在し、 $p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$ 及び $Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}$ が成り立つこともまた、正準変換であることの必要十分条件である。

10.3 リウビルの定理

ハミルトン形式では、系の時間発展は相空間中の点 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) の軌道として理解できる。相空間で表した運動の重要な性質に「相空間中の体積 (相体積: phase volume) は、時間発展で変化しない」というものがある。

¹⁵⁶ $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ が正準変換なら、その逆 $(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \rightarrow (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ もまた正準変換であることは示せる。

¹⁵⁷ これを示す際には、ポアソン括弧の分子分母を逆にした「ラグランジュ括弧 (Lagrange bracket)」

$$[u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} := \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} \right) \quad (10.29)$$

が変換で不変であることもまた、正準変換の必要十分条件であることを用いる。ただしここで \mathbf{q}, \mathbf{p} は u, v の関数とする。

る。この性質をもう少し正確に述べよう。相空間中の点の集合 $S(0)$ をとる (図 44)。時刻 $t = 0$ においてこの集合の中にある点が、ハミルトニアン H に従って時間発展する。時刻 τ においてこれらの点がなす集合を $S(\tau)$ とする。「リュウビルの定理 (Liouville's theorem)」は、 $S(0)$ の体積と $S(\tau)$ の体積が等しいことを主張する。

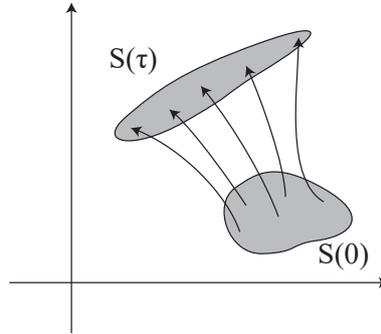


図 44: リュウビルの定理のイメージ図。 $S(0)$ と $S(\tau)$ の相体積が等しい。

リュウビルの定理が成り立つことを示そう¹⁵⁸。任意の (高次元の) 立体は、微小な (高次元の) 直方体の和に分解できるので、微小な直方体の体積が時間発展で変化しないことを示せば十分である。以下では簡単のため q が 1 次元の場合を扱うが、一般次元の場合への拡張は容易である。

相空間中の 4 点 $(q, p), (q + \Delta q, p), (q + \Delta q, p + \Delta p), (q, p + \Delta p)$ を A, B, C, D とラベルする。長方形 ABCD の面積 S は $\Delta q \Delta p$ である。長方形 ABCD が時間発展でどのように変化していくのかを考えたい。点 A の変化速度は

$$(\dot{q}, \dot{p})_A = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \quad (10.31)$$

で与えられる。同様に点 B の変化速度は、 Δ の量の 1 次までで

$$(\dot{q}, \dot{p})_B = \left(\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \Delta q, -\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial q} \Delta q \right) \quad (10.32)$$

である。よって点 A から見た点 B の相対的な変化速度は

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \Delta q, -\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial q} \Delta q \right) \quad (10.33)$$

である。点 C, D も同様に計算できる。ここで、BC の p 方向の変化、及び DC の q 方向の変化は、長方形 ABCD を平行四辺形のように歪ませる効果のみをもたらす、面積は変化させない。面積変化に寄与するのは、

- 辺 BC が q 方向に速度 $\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \Delta q$ で伸びる
- 辺 DC が p 方向に速度 $-\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \Delta p$ で伸びる

の二つである。辺 BC の長さは Δp なので、前者は $\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \Delta q \Delta p$ の単位時間当たりの面積変化をもたらす。同様に辺 DC の長さは Δq なので、後者は $-\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \Delta p \Delta q$ の単位時間当たりの面積変化をもたらす。よって

母関数 $W(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ が存在するとする。このとき、 (\mathbf{q}, \mathbf{p}) のラグランジュ括弧と (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) のラグランジュ括弧の差を考えると

$$\begin{aligned} [u, v]_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} - [u, v]_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial p_i}{\partial v} - \frac{\partial p_i}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial P_i}{\partial v} + \frac{\partial P_i}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial q_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial Q_i} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial q_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial Q_i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial W}{\partial v} \right) - \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial q_i}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial W}{\partial u} \frac{\partial Q_i}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = 0 \end{aligned} \quad (10.30)$$

と、両者のラグランジュ括弧が一致することが示せるので、母関数 W があれば正準変換であることが分かる。

¹⁵⁸以下の証明はベクトル解析を用いずに書いているため、かなり泥臭い説明になっている。ベクトル解析を知っている人向けには、 $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に対する時間発展の流れ場 $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{p}})$ が発散ゼロ、 $\nabla \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ 、であることを示していると同理解してもらいたい。

ABCD の単位時間当たりの面積変化は

$$\frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} \Delta q \Delta p - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \Delta p \Delta q = 0 \quad (10.34)$$

である。つまり時間発展で面積（相体積）は変化しない。

リュウビルの定理は、ハミルトン系の時間発展を写像と解釈した際、これが「保測変換（measure preserving transformation：体積を保存する写像）」であることを主張している。これは散逸のある系とは対照的な性質である。例えば抵抗のある単振動の場合、どのような初期状態から始めても、十分時間が経つと最終的には $(q, p) = (0, 0)$ という状態に落ち着いた。状態が一点に集まるには相空間の体積が収縮しないとけないので、相空間の体積が保存されているならばこのようなことは起こりえない。

リュウビルの定理から導かれる面白い結果として、「ポアンカレの回帰定理（Poincaré's recurrence theorem）」というものがある。とりうる状態が有限領域であるような系を考えよう¹⁵⁹。相空間中の領域 S を適当にとる。このとき、 S 中の体積ゼロの状態の集合を除いて、すべての S に含まれる状態は、十分長い時間が経ったのちに再び S に戻ってくる。これがポアンカレの回帰定理の主張である。

例えばマクロな気体の粒子系を考え、 S としては「容器の左側の密度が高く、右側の密度が低い状態」をとることにしよう。日常的にもよく知っているし、熱力学でも学んだように、この初期状態で系を孤立させて時間発展させると、気体は密度様な状態に平衡緩和する。ところが、ポアンカレの再帰定理は、十分長い時間待っていると、再び「容器の左側の密度が高く、右側の密度が低い状態」に戻ってきってしまうという、驚くべき事実を示している¹⁶⁰。

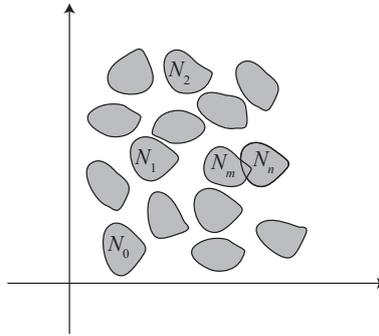


図 45: ポアンカレの再帰定理の背理法による証明。 N_0, N_1, N_2, \dots と続く領域は、どこかに互いに重なり合う部分を持つ。

背理法でポアンカレの回帰定理を証明しよう。 S 中の、時間発展しても S に回帰しない状態の集合を N とし、 N が有限体積を持っていると仮定して矛盾を導く。時間の長さ τ を適当に定め¹⁶¹、 N に属する状態が $n\tau$ だけ時間が経った後の状態たちの集合を N_n を書く。リュウビルの定理により、 N_n の体積は N の体積と同じである。 N_0, N_1, N_2, \dots で相空間を埋めていくと、 N の体積は有限なので、ある m と n が存在し N_m と N_n が重なり合う状況が必ず出現する¹⁶² (図 45)。すると、時間を τ だけ巻き戻すと、 N_{m-1} と N_{n-1} も重なり合っているはずである。これを繰り返すことで、 $N_{|m-n|}$ と $N_0 = N$ が重なり合っていることが分かる。これは、 N 中の状態が $\tau|m-n|$ だけ時間発展すると $N \subset S$ に回帰しているということの意味しており、 N の状態は S に回帰しないという仮定に矛盾する。よって N の体積はゼロであり、 S のほとんどすべての状態は S に回帰することが分かる。

¹⁵⁹ 例えば、有限の相互作用エネルギーを持つ、箱に閉じ込めた粒子系はこの設定を満たす。運動量についても、エネルギー保存している関係上無限に大きな運動量をとれない点に注意。

¹⁶⁰ もちろん実際に実験してもそんな現象は観察されない。これは、「十分長い時間」がマクロな系だと宇宙年齢をはるかに超えた長さになってしまうからである。

¹⁶¹ 経過した時間が微小であれば、当然どの点も出発点近傍にはいるはずである。これは「再帰」と呼びたくないのも、このような状況を排除するために、適当な長さの時間経過した後を見ることにしている。

¹⁶² とりうる状態空間全体を埋め尽くし終わったら、あとは必ず重なり合うしかない。

11 <発展>：求積可能性とカオス

「古典力学」というと、もう百年～数百年前に確立された分野であり、今更新しい発見などはない古い分野だという印象を持つ人も少なくないだろう。しかし、実際にはそれほど古くない時期にも、古典力学はさまざまな進展を見せており、必ずしも「完全に終わった古い分野」ではない。この章では、発展的話題として、古典力学のいくつかの重要な結果を簡単に紹介したいと思う。他の力学の講義やその他の類似の講義でもあまり取り上げられない話題が多いと思うが、ここで取り上げるのは「物体の複雑な運動の一般論」として人類が知っていることのエッセンスであり、力学を学んだ際の少しアドバンストな話題として知っておいて損はない話だと考えている。

これまでの章とは違い、この章は結果紹介にとどまる部分が多く、大半の場合にきちんとした導出は省略している。実際、きちんと数学的導出を説明するならば、それだけで1学期以上の講義が必要になるような内容である。ここで紹介する内容を詳しく書いている教科書はいくつかある¹⁶³ので、興味の湧いた人は読み進めてみてほしい。

11.1 問題背景：求積可能系とカオスの間

今まで力学で見てきた例のほとんどは、運動が厳密に求められる、つまり「解ける」例であった。多少解くのが大変であっても、ケプラー問題や対称な回転剛体などは解くことが出来た。しかし、このように解ける系というのは極めて例外的で、ほとんどすべての物理系は解くことができない。では「解ける系」と「解けない系」は何が違うのか、複雑な運動をする系はしばしば「カオス (chaos)」と呼ばれるが、それと「解けない系」はどう関係しているのか。本章では、そうした問題について明らかになっている事柄を見ていく。

解ける系の単純な例として、単振動が集まった系を考えよう。すなわち、位置 x の運動方程式が、

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i = -\omega_i^2 x_i \quad (1 \leq i \leq N) \quad (11.1)$$

で与えられる系である。これは簡単に解けて、解は

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) \\ C_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ \vdots \\ C_N \sin(\omega_N t + \theta_N) \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

である。このような系を、解ける系、あるいはより専門的には「求積可能系 (integrable systems)」または「可積分系」、の代表例とすることにしよう。

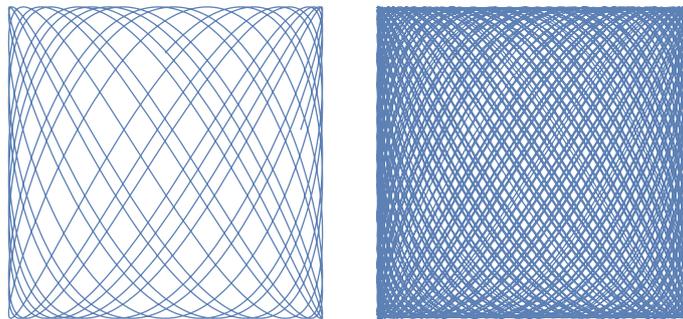


図 46: 1 : 1.568 の場合のリサージュ図形。左は時間が短い場合、右は時間が経過した後。

これだけ簡単な系でも、必ずしも相空間内の軌道が閉じるわけではない点には注意しておこう。 $N = 2$ の場合ならば、 ω_1 と ω_2 がもし無理数比ならば軌道は閉じない。この場合、座標空間で見ると、 $C_1 = C_2 = 1$

¹⁶³大貫義郎、吉田春夫『力学』岩波書店、柴山充瑠『重点解説 ハミルトン力学系——可積分系と KAM 理論を中心に (SGC ライブラリ 130)』サイエンス社、アーノルド『古典力学の数学的方法』岩波書店、丹羽敏雄『力学系』紀伊國屋書店など。

の場合の (x_1, x_2) の軌道は、図 46 のような「リサージュ図形 (Lissajous figure)」になり、軌道はとりうる座標空間全域を覆う (図は 1 : 1.568 の例)。相空間で見た場合には、 (q_1, q_2, p_1, p_2) が作る 4 次元空間の中で、変数 1, 2 それぞれのエネルギー保存則¹⁶⁴ $E_1 = \omega_1^2 q_1^2 + p_1^2$ 、 $E_2 = \omega_2^2 q_2^2 + p_2^2$ を満たすように制限された 2 次元の「トーラス (torus : 浮き輪の表面のような形のこ)」上を状態は運動する。特に $\theta_i = \omega_i t + \theta_i^0$ と置き、

$$q_i = \sin \theta_i, \quad p_i = \omega_i \cos \theta_i \quad (11.3)$$

と表示すると、トーラス上の一点は (θ_1, θ_2) で指定することが出来、この θ_1, θ_2 はともに t に対し線形に振る舞う。 (θ_1, θ_2) の時間発展を図示すると、図 47 のように一定の傾きで平面を覆いつくしていく振る舞いが見れる¹⁶⁵。

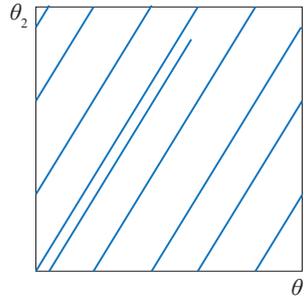


図 47: (θ_1, θ_2) 上での運動。境界は上下、左右とも周期境界である。

多数の単振動からなる系の場合は、運動が初等関数で完全に書き下せた。しかし、完全に初等関数のみの形で書けなくても、例えば逆関数や不定積分を含む形で解を書き下すことが出来ていたら、その系の運動についてはほとんど分かっているといっても過言ではない。そこで、運動が「解ける／求積出来る」ということの定義を、初等関数で書けることよりも広くとり、初等関数に加えて一変数の積分、逆関数、代数方程式の解を得る操作、を有限回組み合わせることで運動の解が得られるのなら、その系は「解ける／求積出来る (integrable)」と呼ぶことにしよう。求積できる系は「可積分系 (integrable system)」という。

この定義の下では、1 変数の運動はすべて求積可能である。実際、ハミルトニアンが

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U(q) \quad (11.4)$$

という形で書ける場合、

$$t = \int dq \sqrt{\frac{2m}{E - U(q)}} \quad (11.5)$$

と、積分を残した形であれば形式的には t と q の関係式を得ることが出来る。ハミルトン力学系の議論における「求積出来る」とは、このような積分の形にまで持ち込めればよい、というスタンスで定義されている。実際、 q - p の相空間中に運動の軌道を描くと、前章の図 43 のようになり、軌道が若干歪むことを除けば単振動の場合と同じ形になり、定性的な振る舞いには特に違いはない。

2 変数以上の系の場合は、一般には解は求積可能ではない (11.3 章参照) が、一定の条件の下では、1 変数の周期運動の直積の形で書ける (11.2 章)。すなわち、適切な正準変数 (Q, P) が存在し、各 (Q_i, P_i) はおのおのこの変数だけの 1 次元の周期運動で書けている状況であり、この場合には式 (11.5) のような 1 変数の積分を含む項の直積の形で解を書き下せる。

一方、このような「周期的運動の直積」とは質的に異なる振る舞いを示すハミルトン系もある。その例として、「エノン・ハイレズ系 (Hénon-Heiles system)」を見よう。エノン・ハイレズ系は自由度 2 のハミルトン系で、そのハミルトニアンが

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \lambda \left(x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \quad (11.6)$$

¹⁶⁴ 本当はこの右辺を定数倍したものがエネルギーだが、その違いは重要でないので右辺そのものをエネルギーのように書いている。

¹⁶⁵ 5 章で見た、中心力場の運動における近日点移動と同じようなものである。

で与えられる系である¹⁶⁶。変数は4つなので相空間は4次元空間だが、エネルギー $E = \text{const}$ の拘束があるため、 (x, y, p_y) の3変数で状態指定が可能な3次元空間にとりうる状態は制限される。

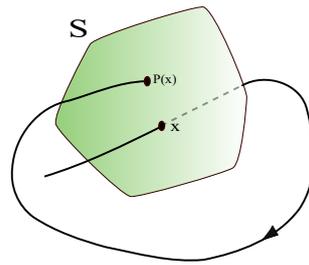


図 48: ポアンカレ写像のイメージ図。軌道がポアンカレ断面 S を繰り返し横切り、それによって写像 P が構成される。画像は Wikipedia 「Poincaré map」より引用。

ここで、 $x = 0$ の面に着目しよう。この面を、軌道がどのように（負から正の方向へ）横切っていくのかを考える。軌道は図 48 のように、定期的にこの面を横切る。面上の点を一つ定めれば、その点の状態が時間発展した際に、次に面を横切る場所が定まる。これによって、 $x = 0$ の面上の点から面上の点への写像が定まる。これを「ポアンカレ写像 (Poincaré map)」といい、横断される面は「ポアンカレ断面 (Poincaré section)」という。特に2自由度系の $x = 0$ の断面におけるポアンカレ写像は、リュウビルの定理と同じように面積を保存する写像であることが示せる¹⁶⁷。

ポアンカレ断面上の点の一つを選び、そこに繰り返しポアンカレ写像を当てはめて、点の軌跡をプロットしてみよう。もしこの系が2つの独立な振動子からなる系であれば、とりうる状態は相空間上のトーラスに制限されているので、ポアンカレ断面 $x = 0$ 上で見るとポアンカレ断面とトーラスの交差部分だけがとりうる状態であり、これはある閉曲線である。つまり、プロットされる点はすべてある閉曲線上に乗る (図 49(a))。

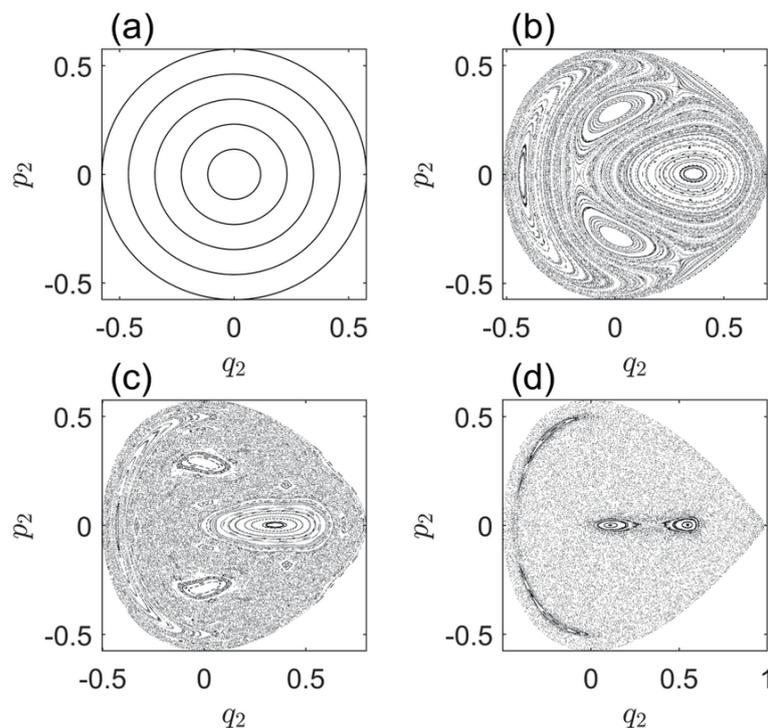


図 49: エノン・ハイレス系の、数個の初期点から始めたポアンカレ写像。(a)-(d) の順に、 $\lambda = 0, 0.7, 0.9, 1$ であり、エネルギーは $E = 1/6$ に固定している。画像は Chen-Di Han, Bryan Glaz, Mulugeta Haile, and Ying-Cheng Lai, Adaptable Hamiltonian neural networks, Phys. Rev. Research 3, 023156 (2021) より引用。

¹⁶⁶ $\lambda = 1$ の場合のみを指して「エノン・ハイレス系」と呼ぶ場合もある。

¹⁶⁷この結果は「ポアンカレ・カルタンの定理 (Poincaré-Cartan's theorem)」によって示せる (V. アーノルド、A. アベズ『古典力学のエルゴード問題』吉岡書店付録 31)

一般の λ のエノン・ハイレス系の場合には、これとは大きく異なる振舞いが見られる。 $E = 1/6$ における異なる λ のポアンカレ写像を数個の初期点に対してプロットしたのが図 49 である。 $\lambda = 0$ は可積分であり、この場合は上述のように数個の閉曲線が得られる (図 49(a))。これに対し、 λ を大きくしていくと、周期軌道の痕跡を残しつつも、平面全体に乱雑に広がる振舞いが見られる (図 49(b)-(d))。特に乱雑に飛び回る領域は、 λ が大きいほど広がる。これがカオス¹⁶⁸ を示す系の典型的な振る舞いである。

ここで、カオスが可積分かの区別は、大域的に見ることで初めて分かる性質であるという点は重要である。局所的にみるとカオス系でも可積分系でも、その相空間中の軌道の流れはほとんど同じであり、両者は局所的な解析では通常区別できない。実際、上のエノン・ハイレス系の解析でも、ポアンカレ断面を設けることで「一周した (= ある程度の時間が経過した) あとの振る舞い」を抽出してそれを解析している。局所的な性質で特徴づけが出来ないという点は、カオスや力学系を問題を難しくする一つの要因である。

11.2 求積可能な系とその性質

では、一般の多体ハミルトン系で解ける (求積出来る) 系はどのような系なのだろうか。結果から言ってしまうと、実は保存量が多数存在することが、解けることと等価な条件であることが示せる。

自由度 n のハミルトン系において、 n 個の保存量 I_1, \dots, I_n が存在し、 n 本のベクトル $\nabla I_1, \nabla I_2, \dots, \nabla I_n$ が線形独立¹⁶⁹ であり¹⁷⁰、さらに $\{I_i, I_j\} = 0$ が任意の i, j で成立するとする。このとき、このハミルトン系は求積可能である。さらにこの n 自由度系は、トーラス上の n 個の周期運動の直積と同相¹⁷¹ であることが示せる。これが「リュウビル・アーノルドの定理 (Liouville-Arnold theorem)」である。この定理があるため、十分な数の保存量の存在でもって「可積分」あるいは「完全可積分」の定義とする場合もある¹⁷²。

リュウビル・アーノルドの定理の証明の概略を示しておこう¹⁷³。カギとなる考えは、保存量 I_1, \dots, I_n を含む新しい正準変数がとれることにある。新しい変数 (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) として、 n 個の運動量を $P_i = I_i$ と与えられている保存量にとることにする。この正準変換を与える母関数は、以下のように構成できる。各 I_i は (\mathbf{p}, \mathbf{q}) の関数なので、逆に p_i たちについて解くことが出来、

$$p_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{I}) \quad (11.7)$$

を与えるような関数 f_i が存在する。これを用いて、保存量 \mathbf{I} を新しい運動量 \mathbf{P} に置き換えたうえで、各 q_i について f_i を積分して足しあげた関数

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) := \int \sum_i f_i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) dq_i \quad (11.8)$$

を正準変換の母関数に選ぶ。右辺の積分が定義できるためには、この積分が経路に依存しない量である、すなわち全微分である必要があるが、この条件は簡単に確認できる。全微分可能である条件は

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0 \quad (11.9)$$

であるが、この関係式 (11.9) はポアソン括弧で保存量同士が可換という条件から導くことができる¹⁷⁴。

¹⁶⁸カオスの定義・特徴づけにはいろいろあるが、ここではその一つとして有界領域中で「初期値鋭敏性を持つ」ことをその特徴として挙げておこう。初期値鋭敏性とは、わずかに異なる二つの初期状態 x, y が、時間発展とともにその距離 $|x(t) - y(t)|$ を時間の指数関数で増大させていくことをいう。

¹⁶⁹微分の線形独立性の条件を課しているのは、例えば I_1, I_2 が保存量であるときに、 $(I_1)^3$ や $\sin(I_1 + 2I_2)$ のような、本質的には I_1, I_2 と変わらない保存量を「別の保存量」と認定しないようにするためである。もし I_3 が二変数関数 $f(x, y)$ を用いて $I_3 = f(I_1, I_2)$ と書けているならば、 $\nabla I_3 = \nabla I_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \nabla I_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$ となるので、これは $\nabla I_1, \nabla I_2$ と線形独立でない。

¹⁷⁰正確には、相空間の領域の稠密な開集合上の任意の点で線形独立であることが要求される。

¹⁷¹大雑把には、連続変形で互いに移りあえる、ということである。正確に定義するには位相 (topology) の議論が必要となるのでここでは省略する。

¹⁷²可積分の定義には異なる複数の定義がある。ここで述べているものはリュウビルによるものであり、それを明示するために「リュウビル可積分性」と呼ぶこともある。

¹⁷³よりきちんとした証明は、脚注 163 で挙げた教科書や、井田大輔『現代解析力学入門』朝倉書店などに出ている。

¹⁷⁴ $p_i = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$ を q_k および p_k で微分すると

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial q_k} + \sum_j \frac{\partial I_j}{\partial q_k} \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \quad (11.10)$$

$$\delta_{ik} = \sum_j \frac{\partial I_j}{\partial p_k} \frac{\partial f_i}{\partial P_j} \quad (11.11)$$

この母関数が欲しい正準変換を与えることを示そう。構成から明らかに、

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = f_i(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = p_i \quad (11.13)$$

が満たされる。 \mathbf{Q} の性質はこのままでは分かりにくいですが、まず $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ は全て保存量なので、ハミルトンの運動方程式より

$$\frac{d}{dt}P_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} = 0 \quad (11.14)$$

と分かり、ハミルトニアンは $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ のみに依存し、 \mathbf{Q} にはよらないことが分かる。すると、 \mathbf{I} は保存量なので

$$\frac{d}{dt}Q_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (11.15)$$

の右辺は初期状態で定まる保存量の値 \mathbf{I} にのみ依存し、時間変化しない。この右辺を ω_i とし、これを並べたものを $\boldsymbol{\omega}$ とすると、 \mathbf{Q} の時間発展は

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}t + \mathbf{Q}^0 \quad (11.16)$$

と線形な運動として書けることが分かる。このような軌道を「クロネッカー軌道」という。これは前の章で議論した単振動が多数集まっている系の場合の結果(11.3)と一致する。

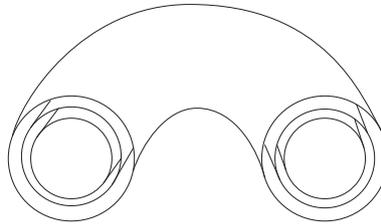


図 50: 自由度 2 の可積分系の相空間のイメージ図。入れ子状に重なり合ったトーラス（各トーラスは異なる I の値を持つ）の一つの面上に軌道は拘束されている。

(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) が実質的には回転運動の集まりであることを踏まえて、 (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) の代わりに $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ と書くこともある。特に I として作用 (action) をとった場合のこの表示を「作用・角変数表示」という。自由度 2 の可積分系の相空間を図示すると図 50 のように、無数のトーラスが入れ子状になった構造をなしている。この図は、もともと 4 次元だった相空間のうち、あるエネルギーをとる空間 (3 次元) だけを抜き出して描いたものである¹⁷⁵。一つの保存量 I に対し、この空間中のトーラス一つが対応する。状態は、ある一つのトーラス上をくまなく運動する。トーラス上のどの位置にいるかは、二つの角変数 θ_1, θ_2 によって定まる。

ちなみに、 n 自由度系において n 個の保存量がある場合には可積分であったが、 n 個より多くの保存量がある場合もある¹⁷⁶。この場合には、トーラス上のクロネッカー軌道はトーラス全体を埋め尽くすことはなく、閉じた期軌道をなす。特に $2n - 1$ 個の保存量がある場合には、トーラス上のすべての軌道が完全に閉じた周期軌道となり、軌道全体も閉じた周期軌道となる。このような系を「超可積分系 (super-integrable system)」という。例えば逆二乗則に従う 2 次元空間中の中心力場の系 (自由度 2) には、エネルギー、角運動量に加えてラプラス・ルンゲ・レンツベクトル (5.6 章) があるので、保存量が 3 つあり、そのためすべての軌道が閉じた。一方、一般の中心力ポテンシャルの系では、エネルギーと角運動量しか保存量がないので、今の定義の下では可積分系だが、軌道は一般に閉じず、近日点移動を起こす。

が得られる。これらを組み合わせることで、

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_i} = \sum_{j,l,m} \frac{\partial f_i}{\partial P_l} \frac{\partial f_k}{\partial P_m} \left(\frac{\partial I_l}{\partial q_k} \frac{\partial I_k}{\partial p_j} - \frac{\partial I_k}{\partial q_k} \frac{\partial I_l}{\partial p_j} \right) = \sum_{j,l,m} \frac{\partial f_i}{\partial P_l} \frac{\partial f_k}{\partial P_m} \{I_l, I_k\} = 0 \quad (11.12)$$

となる。

¹⁷⁵ただしこれは通常の開いた 3 次元空間ではなく、本当は周期境界をなしているものを無理やり通常の 3 次元空間のように図示している点に注意。例えばトーラスの中央部分 (浮き輪ならば人間の体が入る部分) の空洞が気になるかもしれないが、実際にはここに空洞は存在しない。

¹⁷⁶ n 個より多い保存量たちについては、ポアソン括弧が可換であるという条件は課さない。一般に、 n 自由度系において、 n 個より多くの独立な保存量が全てポアソン括弧で互いに可換になることはない。

11.3 求積不可能な系の存在

これまでの力学で見てきた系は、そのほとんどが解ける系であった。しかし、実はそのような系は例外であり、ほとんどの系は解けない（可積分ではない）系である。ここではその事実を見ていこう。

$n = 2$ のパラメータ a を持つハミルトン系 $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; a)$ を考える。ただし $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}$ はともに 2 次元ベクトルである。 $a = 0$ のときに H は可積分で、 \mathbf{I} が保存量とする。つまり、 $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; 0) = H_0(\mathbf{I})$ と書けるということである。 $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; a)$ が

$$H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a) = H_0(\mathbf{I}) + aH_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + a^2H_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + \dots \quad (11.17)$$

と a について展開できるとする。さらに、 $H_0(\mathbf{I})$ が非退化で H_1 が適切な条件¹⁷⁷ を満たすとする。このとき、もし a について解析的な保存量 $\Phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; a)$ が存在するならば、それは $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; a)$ の関数である。すなわち、ハミルトニアン $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; a)$ と独立な保存量は存在しないことが証明出来る。これが「ポアンカレの定理 (Poincaré's theorem)」である。

ポアンカレの定理は、以下のようなアイデアで証明出来る¹⁷⁸。 Φ は a について解析的なので

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a) = \Phi_0(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + a\Phi_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + a^2\Phi_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + \dots \quad (11.18)$$

と展開できる。我々の目標は、すべての Φ_i が実は H の関数であることを示すことである。

まず Φ が保存量であることを示す式、 $\{H, \Phi\} = 0$ 、の両辺に Φ と H の a でのべき展開を代入し、 a の次数ごとの係数を比較することで

$$\{H_0, \Phi_0\} = 0 \quad (11.19)$$

$$\{H_0, \Phi_1\} + \{H_1, \Phi_0\} = 0 \quad (11.20)$$

が得られる。証明は以下の 3 ステップで行われる。以下証明のアウトラインを示す。

1. Φ_0 の $\boldsymbol{\theta}$ についてのフーリエ級数を考えることで、 $\Phi_0(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ が実は $\boldsymbol{\theta}$ 依存性を持たず、 \mathbf{I} のみの関数であることを示す。ここで、式 (11.19) 及び $H_0(\mathbf{I})$ の非退化性を用いている。
2. Φ_1 及び H_1 の $\boldsymbol{\theta}$ についてのフーリエ級数を考えることで、 $\Phi_0(\mathbf{I})$ が実は $H_0(\mathbf{I})$ の関数 $\Phi_0 = f(H_0)$ であることを示す。ここで、式 (11.20) 及び $H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ に対する「適切な条件」を用いている。
3. $\Phi - f(H)$ という量を考える。 Φ と H は保存量なので、 $\Phi - f(H)$ もまた保存量である。 $\Phi - f(H)$ を a でべき展開すると、 $a = 0$ の場合には $\Phi_0 - f(H_0) = 0$ なので、 $\Phi - f(H)$ は a の 1 次から始まる、すなわち

$$\Phi - f(H) = a\Phi^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a) (= a\Phi_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + a^2\Phi_2(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + \dots) \quad (11.21)$$

と書けることが分かる。

$\Phi^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a)$ は保存量なので、上の 1,2 で行ったのと同じ議論を適用することができる。それにより、 $\Phi^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a) = \Phi_0^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + a\Phi_1^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) + \dots$ とべき展開すると、 $\Phi_0^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ は実は $\boldsymbol{\theta}$ に依存しておらず、 $H_0(\mathbf{I})$ の関数 $\Phi_0^* = f^*(H_0)$ として表せることが分かる。また、 $\Phi^* - f^*(H)$ は保存量であり、 a で割り切れることも分かる。これを繰り返すことで

$$\begin{aligned} \Phi &= f(H) + a\Phi^*(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a) \\ &= f(H) + a(f^*(H) + a\Phi^{**}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a)) \\ &= f(H) + a(f^*(H) + a(f^{**}(H) + a\Phi^{***}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}, a))) \\ &= \dots \end{aligned} \quad (11.22)$$

となり、すべての a のべき Φ_i が実は H の関数であることが示せる。

¹⁷⁷ 厳密な形で条件を書き下そうとすると煩雑なのでここでは省略する（次の脚注の文献などを見てもらいたい）。大雑把には非退化条件に類似した条件である。

¹⁷⁸ 証明は、大貫義郎、吉田春夫『力学』岩波書店、柴山充瑠『重点解説 ハミルトン力学系——可積分系と KAM 理論を中心に (SGC ライブラリ 130)』サイエンス社、丹羽敏雄『力学系』紀伊國屋書店などに出ている。

1,2 の議論は省略したが、各波数ごとにポアソン括弧の制限 (11.19), (11.20) を考えることで、実はすべての波数の係数がゼロであることを示す、という論法を用いている。仮定として置いた $H_0(\mathbf{I})$ の非退化性と $H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ に対する「適切な条件」は、行列の次元 (ランク) が下がる特異的な状況だと、波数の係数についての議論が成り立たなくなるので、それを排除するためのものである。

ポアンカレの定理について一つ注意しておきたいのは、この結果はあくまでも「近可積分系において、『摂動パラメータで解析的につながるような』保存量は存在しないこと」しか述べていないという点である。この結果からは、「すべての a において (エネルギー以外の) 保存量が存在する」ということはないことが示唆される¹⁷⁹ が、ある特定の (有限の) a においてハミルトニアンが保存量を持つ可能性を排除するものではない。例えば、以下のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2) + \frac{\lambda}{2}x^2y^2 \quad (11.23)$$

は、パラメータ λ で可積分系から摂動されている系であり、一般の λ では非可積分だが、 $\lambda = 0$ 以外にも $\lambda = 1, 3$ で可積分であることが知られている¹⁸⁰。

なお余談だが、解けることは実際に解いて見ればいいが、「解けない」ことの証明は非常に難しい。しかし、可積分性判定の分野には「特異点解析」という強力な手法があり、これによって「解けうる系」を絞り込むことができる¹⁸¹。例えばハミルトニアン (11.23) は、この手法により可積分なパラメータは $\lambda = 0, 1, 3$ しかないことが証明されている。また、3次元空間中の剛体の運動で解けるものは、既にみたオイラーのコマ (トルクなしの系)、ラグランジュのコマ (対称なコマ)、に加えて「コワレフスカヤのコマ (Kowalevski's top)」だけであることが証明されている¹⁸²。

11.4 近可積分系：KAM 定理

前の節で、可積分系にわずかでも摂動を加えたら、その系はもはや可積分ではなくなることを見た。では、そのような系は激しくカオス的なふるまいを示すのだろうか。しかしもしそうだとすると、例えば地球-太陽のケプラー運動は、実際には金星や木星などから摂動を受けているので、地球の運動はカオス的で不安定だということになってしまう。これは観察事実と反しており、摂動を受けた可積分系 (近可積分系) も、可積分ではないにしても可積分系に近いふるまいをしていてくれるのではないかと期待したくなる。この期待は正しく、近可積分系では運動の解を求めることはできないが、摂動が十分に弱いならば大半の軌道が元の可積分系に近い振る舞いをしており、摂動が強くなるにつれてだんだんと可積分系の性質が壊れていく、ということが知られている (図 51、あるいは図 49 も参照)。これを示してくれるのが「コルモゴロフ・アーノルド・モーザーの定理 (Kolmogorov-Anold-Moser theorem : 通称 KAM 定理)」である。

KAM 定理では、可積分系から摂動された状況

$$H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; \varepsilon) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) \quad (11.24)$$

を考える。ただし \mathbf{I} は可積分系 H_0 の保存量、 $\boldsymbol{\theta}$ はそれに共役な角度座標である。可積分系においては、 $\boldsymbol{\theta}$ の時間発展はクロネッカー軌道

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\theta}^0 \quad (11.25)$$

で与えられる。摂動の形としては、摂動が角度全体の平均を動かさないという条件

$$\int d\boldsymbol{\theta} H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = 0 \quad (11.26)$$

¹⁷⁹ 厳密には、 a に対しては不連続な形で、すべての a に対して保存量が存在することはこれだけでは排除しきれないが、そのようなことは普通は考えられない。

¹⁸⁰ どのように解けるのかは、大貫義郎、吉田春夫『力学』岩波書店 3-3 節に議論がある。

¹⁸¹ ものすごく大雑把にいうと、もし系が可積分ならば、微分方程式の発散が起きる特異点の周りでもその微分方程式は解けないといけないうので、「特異点周りで整合的に方程式が解ける」という条件から、解ける方程式の形を絞り込もう、というものである。「可積分か否かは大域的性質であり、局所的性質では一般に判別できない」と前に書いたが、その例外となるのが特異点周りである。特異点においては「大域的に軌道が一周してくる際の挙動」がそのまま「特異点近傍における方程式の性質」の押し込まれているので、一点の性質を解析するだけで、大域的性質である可積分性についての情報を引き出せる、というのが特異点解析の着想である。

特異点解析についての解説は、大貫義郎、吉田春夫『力学』岩波書店第 5 章や、吉田春夫『岩波講座 物理の世界 力学 <4> 力学の解ける問題と解けない問題』岩波書店の後半などで見ることができる。

¹⁸² 特異点解析の手法自体が、コワレフスカヤが剛体の問題を解くために導入したもので、それによって彼女はまだ発見されていない第三の「解ける剛体の設定」を見つけた。

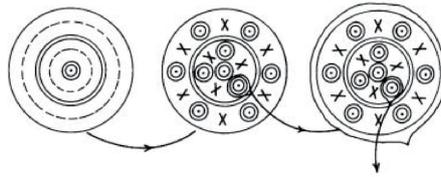


図 51: 可積分系に摂動をかけていった際のポアンカレ断面のイメージ図。いくつかの領域では周期軌道が壊れて、可算個の固定点とカオス的に振る舞う領域とに分裂する。その一方、摂動が弱ければ残っている周期軌道 (KAM トーラス) もある。画像は H. Schuster, W. Just, "Deterministic Chaos: An Introduction" Wiley (2005) より引用。

を満たすものを考える。

KAM 定理は、十分小さな ε においては、 $H(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}; \varepsilon)$ のほとんどの軌道が、 H_0 におけるクロネッカー軌道からの微小変形であることを主張する。より正確な主張は以下である。 $\boldsymbol{\omega}$ が適切な条件 (成分が有理数比に近くないこと。詳細は後述) を満たしており、 $Q = O(|\mathbf{I}|^2)$ ($\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{0}$ において) を用いて可積分ハミルトニアンが

$$H_0(\mathbf{I}) = E + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} + Q(\mathbf{I}) \quad (11.27)$$

と書けるとする。ただし今保存量 \mathbf{I} の原点を動かし、着目している保存量の値が $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ になるようにした。このとき、摂動ハミルトニアンに対する正準変換 $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) \rightarrow (\boldsymbol{\theta}', \mathbf{I}')$ が存在し

$$H(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{I}'; \varepsilon) = E(\varepsilon) + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I}' + Q'(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{I}', \varepsilon) \quad (11.28)$$

と書けることを KAM 定理は主張する。ただし $Q'(\boldsymbol{\theta}', \mathbf{I}', \varepsilon)$ は $O(|\mathbf{I}'|^2)$ の関数である。この主張が成り立つとすると、ハミルトンの運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial Q'}{\partial \mathbf{I}'} \quad (11.29)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{I}' = -\frac{\partial Q'}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \quad (11.30)$$

である。ただしここで $\frac{\partial Q'}{\partial \mathbf{I}'}$ 等は $\frac{\partial Q'}{\partial I'_i}$ たちからなるベクトルを指している。以下もこの略記を用いる。今、 Q' の項は $\mathbf{I}' \rightarrow 0$ でゼロになるので、特に保存量の値が $\mathbf{I}' = \mathbf{0}$ のときには $\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\omega}t + \boldsymbol{\theta}'^0$ というクロネッカー軌道がそのまま成り立つ。すなわち、再びトーラス上の軌道が得られる。このトーラスを「KAM トーラス」という。

なお、KAM 定理の摂動論は、通常のハミルトニアンに対する摂動論とは異なり、先にある一つの周波数 $\boldsymbol{\omega}$ を決めてそれに併せて摂動展開の組み方や ε の上限値が定まる点には注意が必要である。KAM トーラスの割合が高い状況であっても、準周期領域とカオス領域がきれいに分離しているわけではなく、準周期軌道がの位置はフラクタル図形をなしている (太ったカントール集合¹⁸³ など、有限面積だがいたるところに穴が開いている図形をイメージしてもらいたい)。

KAM 定理の証明では、欲しい正準変換を摂動で逐次的に組み立てていく¹⁸⁴。正準変換の母関数を

$$S(\mathbf{I}', \boldsymbol{\theta}; \varepsilon) = \mathbf{I}' \cdot \boldsymbol{\theta} + \varepsilon S_1(\mathbf{I}', \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^2 S_2(\mathbf{I}', \boldsymbol{\theta}) + \dots \quad (11.31)$$

¹⁸³初期状態を長さ 1 の線分とし、 n ステップ目には、今ある線分に対し「その中心部分の $1/4^n$ を取り除く」という操作を無限に繰り返して得られる図形。長さ (ルベグ測度の意味) は $1/2$ だがいたるところに穴があいており、この図形の指示関数はリーマン可積分ではない。

¹⁸⁴以下の議論はかなりかいつまんだラフなものである。より詳細な議論は柴山充瑠『重点解説 ハミルトン力学系——可積分系と KAM 理論を中心に (SGC ライブラリ 130)』サイエンス社、丹羽敏雄『力学系』紀伊國屋書店などを見ていただきたい。アーノルド『古典力学の数学的方法』岩波書店やアトレー・ジャクソン『非線形力学の展望 II 複雑さと構造』共立出版にもその考え方は出ている。

と ε で展開する。すると

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} + O(\varepsilon^2) \quad (11.32)$$

$$\boldsymbol{\theta}' = \boldsymbol{\theta} + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \mathbf{I}'} + O(\varepsilon^2) \quad (11.33)$$

であり、これらを代入するとハミルトニアンは

$$H_0(\mathbf{I}) = H_0(\mathbf{I}') + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} + O(\varepsilon^2) \quad (11.34)$$

$$\varepsilon H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = \varepsilon H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}') + O(\varepsilon^2) \quad (11.35)$$

と書ける。

我々は、摂動ハミルトニアンで ε の低次項が順次消えていく状況を構築したい。そのため、 ε の一次が消えるために

$$\frac{\partial S_1}{\partial \boldsymbol{\theta}} \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} + H_1(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I}) = 0 \quad (11.36)$$

という条件が満たされるような解析的な S_1 を探したい（あとは高次でも同じような手続きを繰り返せばよい）。ここで、 $\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} = \boldsymbol{\omega}$ なので、与えられた \mathbf{I} に対し、 S_1 の微分方程式

$$\sum_i \omega_i \frac{\partial S_1}{\partial \theta_i} = -H_1(\boldsymbol{\theta}) \quad (11.37)$$

が解ければよい。 S_1 と H_1 をフーリエ級数展開すると

$$S_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} S_{\mathbf{k}}^1 e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (11.38)$$

$$H_1(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} H_{\mathbf{k}}^1 e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (11.39)$$

となる。これを式 (11.37) に代入すると

$$i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}) S_{\mathbf{k}}^1 = -H_{\mathbf{k}}^1 \quad (11.40)$$

が得られるので、解は形式的に

$$S_1(\boldsymbol{\theta}) = S_0 - \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}} \frac{H_{\mathbf{k}}^1}{i(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega})} e^{i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\theta}} \quad (11.41)$$

と解ける。ただし $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ の場合は、条件 (11.26) より式 (11.40) は自動的に満たされ、 S_0 は任意となることを用いている。

形式解が得られたが、問題は式 (11.41) の右辺が収束するかである。和の中の分母 $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}$ は、 \mathbf{k} の逆比が $\boldsymbol{\omega}$ をよく近似していればいくらでもゼロに近づく。説明を分かりやすくするため $n = 2$ の場合で考えよう。もし $\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$ のように、 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ が有理数ならば、 $\frac{k_1}{k_2}$ をこの有理数の逆数（で一方の符号をマイナスにし

たもの）にとることにより、 $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ と出来てしまう。上の例ならば、 $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ ととれば $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ と

なり、式 (11.41) 右辺は発散する。また、 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ が無理数であったとしても、この無理数を有理数 $\frac{k_1}{k_2}$ がよく近似するようにうまく選ぶことが出来るので、 $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\omega}$ はいくらでも小さくすることができてしまう。

この事実を見ると式 (11.41) の右辺は収束などしなさそうに見える。だがここで注目すべきは、一般の無理数を有理数でよく近似しようと思うと、その有理数の分母は大きくなってしまふという点である。 $H_{\mathbf{k}}^1$ は、 H_1 が滑らかならば $|\mathbf{k}|$ が大きくなるにつれてゼロに近づいていく量である¹⁸⁵。そのため、 $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ が有理

¹⁸⁵フーリエ級数の高周波数成分が小さくなるということを言っている。

数近似できてしまったとしても、その近似精度（ずれ）よりも速く H_k^1 がゼロに収束しているのならば、式 (11.41) 右辺の無限和が収束していることを示せるかもしれない。KAM 定理の証明の大半は、この収束を（高次の場合も含めて）厳密に示すことに費やされている。特に ω が、ある適切な定数 a と c について

$$k \cdot \omega \geq \frac{a}{|k|^c} \quad (11.42)$$

が成り立つという「ディオファントス条件¹⁸⁶（小分母条件とも）」を満たす際には、この収束が実際に証明出来る¹⁸⁷。

KAM 定理における収束性のよさ／悪さは、軌道の摂動に対する安定性／不安定性とつながっている。すなわち、 ω が有理数比に近い（正確には、分母の小さい有理数に近い）場合には、軌道は簡単に不安定化してトーラス上の軌道ではなくカオス的な軌道になってしまう。一方、 ω が有理数比から遠い場合には、弱い摂動に対しては軌道は（準）周期的なトーラス上の軌道にとどまる。直感的には、「有理数比に近い」というのは、4.3 章で見た強制振動における共鳴状況に近いということである。強制振動における共鳴とは、系がちょうど特定の状態に近いところにいるときに同じような力を繰り返し受けると、その効果が増幅してしまうということであった。これと同様に、もともとの周期軌道と「揃っている」摂動を受けると、摂動の効果がどんどん増幅し、トーラス上の軌道から弾き飛ばされてしまう。ディオファントス条件や分母の小さい有理数での近似の議論は「どの位の回数待つと揃うのか」の目安を与えるもので、例えば 3 回に 1 回揃うのであれば摂動の効果は容易に増幅するのに対し、1000 回に 1 回しか揃わないのであれば摂動の効果は微々たるものでほとんど増幅できない、などのように考えられる。

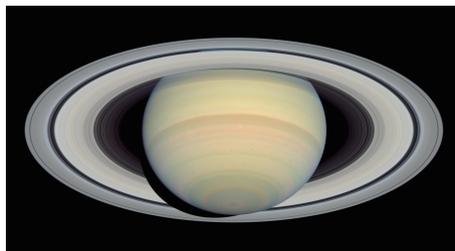


図 52: ハッブル宇宙望遠鏡で撮影された土星。土星の環には隙間があることが見える。画像は Wikipedia 「Ring of Saturn」より引用

土星の輪の空隙は、有理数比の共鳴や KAM 定理のある種の例として理解できる。土星の輪は小さな氷が集まって出来ているものだが、ところどころに隙間（黒い部分）がある（図 52）。図中の一番大きな隙間は「カッシーニの空隙（Cassini Division）」と呼ばれている。これは土星の衛星ミマスの軌道と 2:1 の共鳴の位置関係にあるので、これによりこの位置の軌道は容易に不安定化したのだと考えられている¹⁸⁸。逆に衛星との有理数比から遠いところの軌道は残っており、それが土星の輪を構成している。（ただしこれは一時的なもので、最終的には全ての土星の輪は不安定化して無くなってしまおうと考えられている）

11.5 カオスの振る舞い

では最後に、カオスが見られる場合の振る舞いを簡単に見ておこう¹⁸⁹。カオスがどのように現れるかを見るには、以前エノン・ハイレス系の解析でも用いた自由度 2 の系のポアンカレ写像を使うのが便利である。

自由度 2 の場合、ポアンカレ写像は面から面への写像である。この写像における固定点を考えよう。固定

¹⁸⁶ 余談だが、ディオファントス条件あるいはこれに類似する有理数近似精度についての不等式は、ある数が超越数（代数方程式の解にならない数）であることを証明する際にも頻繁に用いられる。

¹⁸⁷ 有理数近似については以下の定理が知られている。任意の無理数 x について、

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5}n^2} \quad (11.43)$$

を満たす自然数 m, n が存在する（フルビッツの定理）。一方、十分小さな $C > 0$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 C に依存した一定割合を除くほとんどのすべての無理数 x は

$$\left| x - \frac{m}{n} \right| > \frac{C}{n^{2+\varepsilon}} \quad (11.44)$$

を満たす。

¹⁸⁸ ただし空隙の中にも一部の軌道は残っており、細かな振る舞いを説明するにはより詳細な解析が必要である。

¹⁸⁹ 以下の内容についてのより詳しい議論は、アトレー・ジャクソン『非線形力学の展望 II 複雑さと構造』共立出版、大貫義郎、吉田春夫『力学』岩波書店、あるいは多くのカオス・非線形物理の教科書に出ている。

点はポアンカレ写像で位置を変えない点なので、相空間全体の運動の言葉でいうとこれは周期軌道に対応する。特に固定点回りの振る舞いが伸び縮みを伴うような場合¹⁹⁰ を考える。この場合、面積保存の性質より、固定点に向かって吸い込む流れと固定点から吐き出す流れの二つが存在する¹⁹¹。特に、ポアンカレ写像で変化しない曲線（これを「不変曲線」という）を二本得ることが出来る（図 53）。固定点に向かっていく不変曲線と離れていく不変曲線を、それぞれ「安定多様体 (stable manifold)」と「不安定多様体 (unstable manifold)」という。

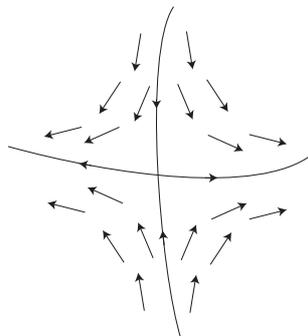


図 53: 安定多様体（垂直）と不安定多様体（水平）が交差している固定点。残りの矢印は流れを表している。

ある固定点の安定多様体 W と、（同じ固定点のものとは限らない）多様体 U とが、固定点でない場所で交差したとしよう（図 54 左）。すると、以下の議論により、この系は極めて複雑なカオス的挙動を示すことが分かる。交差した点を P_0 としよう。 P_0 は安定多様体 W 上の点なので、ポアンカレ写像により P_0 は同じ W 上であり固定点により近い点 P_1 に移される。また、 P_0 は多様体 U が通過していたので、それをポアンカレ写像で移した点 P_1 も同じ多様体 U が通過していないといけない。これが実現するには、図 54 中央のように U が W と交差していればよい。

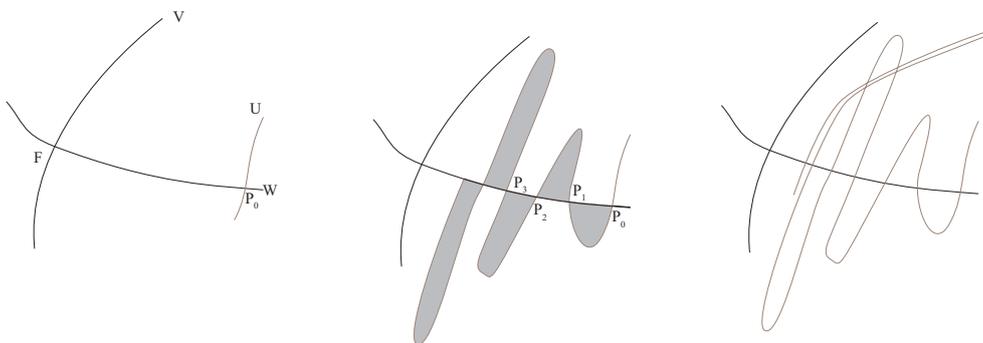


図 54: (左): ある安定多様体 W と別の多様体 U が P_0 で交差したとする。(中): すると、 U は W と P_1, P_2, P_3, \dots でも交差しないといけない。ここでグレーの面積たちは全て等しい。(右): これを繰り返すと、どこかで U の自己交差が生じないといけない。この交点に対しても同様の議論が成り立つので、結果として多様体は無限に複雑に交差し、その構造はフラクタル的になる。

点 P_0 にポアンカレ写像を繰り返し作用していくことで得られる点の列を P_1, P_2, P_3, \dots とする。すると、同じ議論を繰り返すことで、多様体 U は P_1, P_2, P_3, \dots をすべて通過しなければならないので、 U と W は図 54 中央のように交差していないといけない。ところで、ポアンカレ写像は面積を保存する写像（補測写像）なので、図 54 中央に描かれているグレーの領域の面積（ P_0 - P_1 間、 P_1 - P_2 間 \dots ）は全て等しくないといけない。ところが、点列 P_1, P_2, P_3, \dots は、固定点に近づくにつれてどんどん点同士の間隔が狭くなる。これと面積保存を整合させるには、安定多様体 W と垂直な方向に多様体 U を伸ばすしかない。

そうするとどこかで多様体 U は、 U 自身と交差しないといけない¹⁹²（図 54 右）。すると交差した点が

¹⁹⁰ 固定点回りで写像を線形化した際、固有値が実数であるということ。これを「双曲不動点」という。これ以外の場合としては、固有値が絶対値 1 の複素数の場合がある。この場合、写像は固定点回りの回転運動を与える。この固定点は「楕円不動点」という。

¹⁹¹ 正確には、線形化した場合の変換の二つの固有ベクトルに沿った流れのことである。

¹⁹² P_n は $n \rightarrow \infty$ で始めて固定点 F に収束するので、このようなグレーの領域は無限個現れる。グレーの領域の面積が全て等しく、ポアンカレ断面の面積が有限である以上、必ずどこかで自己重複が起きないといけない。

移される先の点を U は通る必要があり、さらに U は複雑にねじれる必要が出て…ということが延々と繰り返される。結果的に、固定点回りでは極めて複雑なフラクタル構造が出現し、ポアンカレ写像が与えるダイナミクスは極めて乱雑なものとなる。これがカオスの典型的な振る舞いである。

ただし、自由度 2 の場合と自由度 3 以上の場合とでは、可積分系に近い状況の振る舞いは定性的に異なる。自由度 2 の場合、壊れたトーラスもある一方で、先述の KAM トーラスがまだ残っている。自由度 2 の相空間では、二つの KAM トーラスで区切られた空間は完全に閉じた空間なので、その中のトーラスが壊れても、それを取り囲む二つの KAM トーラスが残っている限り、トーラスに挟まれた空間の外側に状態が逃げ出すことはできない。なので、準周期的に振る舞う多数の積み重なった KAM トーラスに挟まれて、カオス的に振る舞う薄く狭い空間¹⁹³ が存在する、という層が重なったような構造をなす (図 49 や図 51 など参照)。これに対し自由度 $n \geq 3$ 以上の相空間では、二つの KAM トーラス (次元 n) では $2n - 1$ 次元の相空間 (エネルギーを固定している) を区切ることは出来ず、内部と外部はトーラスを横切ることなく自由に行き来できる。そのため、ある KAM トーラスが壊れると、たとえ周りの KAM トーラスが残っていたとしても、壊れたトーラス上の状態はそのトーラスから大きく離れた場所まで変化することができる。KAM トーラスに挟まれた空間から抜け出していく過程を「アーノルド拡散 (Arnold diffusion)」という。ただし特に摂動 ε が小さい場合には、KAM トーラスに挟まれた空間から抜け出すのには非常に長い時間がかかることも知られている¹⁹⁴。

11.6 (数学の補足): フーリエ級数

フーリエ級数展開はまだ習っていない人がほとんどであろう¹⁹⁵ から、ここで簡単に補足する。フーリエ級数展開でやりたいことは「周期関数を、周期関数の代表格である三角関数の和の形で表そう」というものである。

フーリエ級数展開でカギになるのは、自然数 n, m に対して成り立つ以下の関係式である¹⁹⁶。

$$\int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \sin(mx) = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m \end{cases} \quad (11.45)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \cos(nx) \cos(mx) = \begin{cases} 0 & : n \neq m \\ \pi & : n = m \end{cases} \quad (11.46)$$

$$\int_0^{2\pi} dx \sin(nx) \cos(mx) = 0 \quad (11.47)$$

イメージとしては、三角関数の振動数がずれていると、途中で正負が互いに打ち消し合って積分がゼロになってしまう、という風に理解しておけばいい。

この関係があるため、もし $f(x)$ が区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上の関数であり、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos nx \quad (11.48)$$

と書けていたとすると、

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin nx \quad (11.49)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos nx \quad (n \geq 1) \quad (11.50)$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \quad (n = 0) \quad (11.51)$$

¹⁹³ この空間は厚さゼロのトーラスではなく、有限の厚みを持っている。

¹⁹⁴ これを「ネコロシェフ安定性」という。

¹⁹⁵ 1 年生冬学期の「振動・波動論」で学習すると思う。

¹⁹⁶ 積和の公式を用いて変形すれば、これらの結果は簡単に示せる。

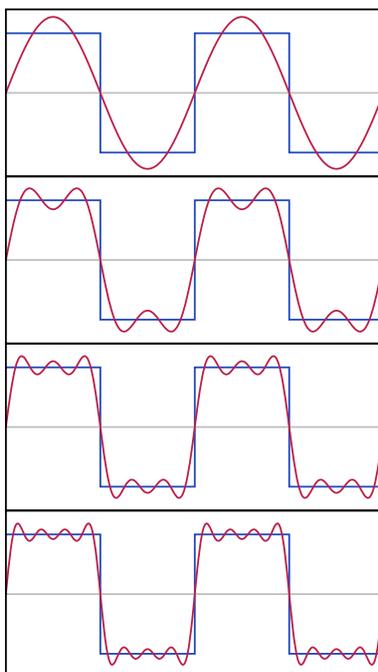


図 55: 方形波関数に対するフーリエ級数の例。適切な三角関数を足し合わせていくことで、方形波関数に近づいていく様子が見れる。画像は Wikipedia 「フーリエ級数」 より引用。

と、係数を $f(x)$ から簡単に求めることが出来る。そのため逆に、一般の区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上の関数 $f(x)$ に対しても、式 (11.49)、(11.50) で係数を決めて、関数 f は式 (11.48) 右辺のように展開できるだろうと考えるのは自然である。これを実行したのがフーリエ展開であり、その際の式 (11.48) 右辺をフーリエ級数という。フーリエ級数展開の例は、方形波に対する図 55 などを見ると、何をしているのか理解しやすいだろう¹⁹⁷。

一般の場合に式 (11.48) 右辺が本当に左辺 $f(x)$ に収束するかはきちんとした議論が必要であり、数学的には高度な技術を要する部分もあるが、(物理の文脈で出会う) ほとんどのまともな関数では、フーリエ級数は元の関数に収束する¹⁹⁸。

三角関数はオイラーの公式 $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ で指数関数に結び付けられるので、三角関数の代わりに指数関数を用いることも多い。この場合は

$$f(x) = \sum_n c_n e^{inx} \quad (11.52)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) e^{-inx} \quad (11.53)$$

とフーリエ級数展開される。この場合は n が波数である。

¹⁹⁷ただし方形波のように不連続な関数の場合、フーリエ級数展開して得られる関数は、元の方形波の関数に各点収束はするが一樣収束はせず、端に 1 割ほどの出っ張りが残り続けることが知られている。これは「ギブス現象」と呼ばれている。

¹⁹⁸フーリエ変換が収束する場合・しない場合について、ここではいくつか知られている結果をまとめておこう。 $S_N(x) := \sum_{n=0}^N a_n \sin nx + b_n \cos nx$ と定義する。 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) = f(x)$ がすべての x で成り立てば、「フーリエ級数は $f(x)$ に各点収束する」という。また、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_x |S_N(x) - f(x)| = 0$ が成り立てば、「フーリエ級数は $f(x)$ に一樣収束する」という。まず肯定的な結果について。

- $f(x)$ がリーマン可積分なら、測度ゼロの点を除いたほとんどすべての x について、フーリエ級数は $f(x)$ に各点収束する。
- $f(x)$ が (1 回) 連続微分可能なら、フーリエ級数は $f(x)$ に一樣収束する。

一方で、後者の結果の「連続微分可能」を「連続」に置きなおすことはできない。

- $f(x)$ は連続だが、 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(x) \neq f(x)$ となる x が存在するような $f(x)$ が存在する。

詳細を知りたい人は、エリヤス・M. スタイン、ラミ・シャカルチ『フーリエ解析入門』日本評論社などを読んで頂きたい。