

# 力学：講義ノート

白石直人

## 1 はじめに

### 1.1 講義全体の流れ

この講義の前半では、質点の運動方程式 (1.2) を出発点にして様々な力学の結果を導く。運動方程式 (1.2) からは運動量保存則などの一般的な法則が導出できる。また個別具体的な設定においては、運動方程式 (1.2) が与える微分方程式を解くことで、質点の運動を定量的ないし定性的に導出できる。

講義後半では、多数の質点が集まって出来た有限の大きさの物体の運動を考察する。この場合にも質点の運動方程式 (1.2) を出発点にすることもできるが、より一般的な方法であるラグランジアンを用いた手法の方が便利なので、これを導入する。具体的な設定としては、独楽 (コマ) などの剛体の回転運動を中心に扱う。

時間があれば、可積分性やカオスなどの話題にも触れたい。

### 1.2 古典力学の構造と運動方程式

古典力学 (classical mechanics)<sup>1</sup> では、投げたボールから回転するコマまで、力を受けた物体の運動を取り扱う。力学は我々の身近な現象の物理的記述の最も基本的なものであり、またおおよそすべての物体の運動 (バクテリアの運動から工作機械まで) の記述に用いられるものであるため、応用においても非常に重要である。また、そうした応用上の重要性のみならず、力学を通じて物理学的なもの見方の重要な部分にも触れることができる (これについては本章の最後でもう一度触れる)。

力学の一番簡単な問題設定として、質量<sup>2</sup> を持つが大きさのない点の運動がよく取り扱われる。このような点を「質点 (point mass)」と呼ぶ。もちろん現実世界には大きさのない物体など存在しないが、以下の理由により質点記述は有効かつ有用な道具である。第一に、例えば投げたボールの運動を記述したい場合、ボールを「その重心にボールの全質量が集まった質点」とみなして計算しても、おおよそ運動はよく記述できるという点が挙げられる。そのため、質点による記述は運動のよい近似的記述としてよく用いられる。第二に、堅い物体から連続変形する水などに至るまで、あらゆる大きさのあるものを「無数の質点の集まり」とみなして記述することができる<sup>3</sup>。このことを踏まえると、質点の運動こそが力学の記述の基礎となるものだといえる。

3次元空間中の一つの質点の座標を、直交座標系を用いて  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  で表す。この講義では、太文字はベ

クトルを表すものと約束する<sup>4</sup>。力学では、慣習的に上付きのドットで時間微分を表す。例えば

$$\dot{\mathbf{r}} := \frac{d}{dt} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{r}} := \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

となる。位置  $\mathbf{r}$  の一階微分は速度であり、慣習的に  $\mathbf{v}$  と書く。

<sup>1</sup> 「古典」としているのは、量子力学 (quantum mechanics) との区別のためである。ただしこの講義ノートでは以降、混乱がない場合にはただ「力学」とだけ書いて古典力学を指すものとする。

<sup>2</sup> 後述する連続体の記述が行われる場合には、質量ではなく質量密度 (単位体積当たりの質量) を持つ点として扱われる。この場合には一点の質量はゼロであり、その代わり無数の点 (すべて合わせると質量は有限) があるという状況設定となる。

<sup>3</sup> 大きさを無視して運動を議論することは古くから行われていたが、この点を強調して質点記述の普遍性を最初に指摘したのはレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler) である (山本義隆『古典力学の形成』日本評論社)。

<sup>4</sup> 板書においては、 $\mathbf{x}$  のように二本線でベクトルを表す。

力学の出発点となるのは、以下の物理法則（公理）である。質量  $m$  の質点の位置  $\mathbf{r}$  の時間発展（time evolution）は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (1.2)$$

で与えられる。ただし  $\mathbf{F}$  はこの質点に働く力であり、力  $\mathbf{F}$  の具体的な形は問題設定ごとに異なる。この式を質点の「運動方程式（equation of motion）」という<sup>5</sup>。以降の結果は、すべてこの運動方程式を出発点として導き出すことが出来るものである。

運動方程式の特殊な場合として、力が一切働かない状況がある。この場合には  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  なので、速度変化が一切ない、すなわち

$$\mathbf{v} = \text{const} \quad (1.3)$$

という状況が成り立つ。ただし「const」は定数（constant）を表す。これは、静止しているものは静止し続け、運動しているものはその速度で運動し続けるという「慣性の法則（law of inertia）」である<sup>6</sup>。

### 1.3 力の性質

力学の具体的設定においては、「各物体に働く力を見抜く」ことは重要である。ただしこの講義では、複雑な力の関係を見抜く問題はあまり取り扱わない<sup>7</sup>ので、ここではこの問題には深入りしない。苦手な人は高校物理の教科書などで復習しておいてもらいたい。

[1-1] 図 1 のように、太さの無視できる棒を壁に立てかける。ただし棒と床の間には摩擦が働くが、壁と棒の間には摩擦は働かないものとする。

棒の長さを  $L$ 、棒の質量を  $m$ 、棒と床の接点から棒の重心までの距離を  $l$ 、棒と床の間の角度を  $\theta$ 、床の最大静止摩擦係数を  $\mu$ 、重力加速度を  $g$  とする。棒に働く力と、その大きさが満たすべき関係式を導け（解くべき方程式を立てるまででよく、力の大きさを具体的に求める必要はない）。

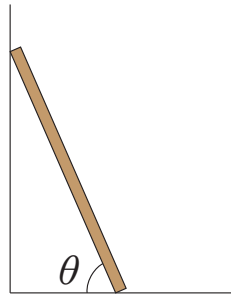


図 1: 棒を立てかけた状況

力についての重要な性質に「作用・反作用の法則（law of action and reaction）」がある。これは、二つの質点  $ij$  間に力が働く際、「質点  $i$  が質点  $j$  に及ぼす力」と「質点  $j$  が質点  $i$  に及ぼす力」は、大きさは同じで向きは反対になる、という法則である。式で書くと、質点  $i$  が質点  $j$  に及ぼす力を  $\mathbf{F}_{ij}$  と書くことにすると、

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} \quad (1.4)$$

<sup>5</sup>多くの教科書では、この式は「ニュートンの運動方程式」と呼ばれている。しかし歴史的に見れば、この運動方程式を最初に書き下したのはオイラーである。運動法則に類するものはニュートン以前にもガリレオやデカルト、ホイヘンスなどが与えており、ニュートン自身の運動法則も混乱を残したものであった（例えば脚注 6 にも示すように、ニュートンは慣性力を力と考えていた節がある）。そして同時代から 19 世紀後半に至るまでは、ニュートンの功績を褒めたたえる本においてさえ、ニュートンのもっぱら万有引力の法則の発見者としてのみ評価されており、力学法則の創始はオイラーを最終到達点とする多様な人物の功績として認識されていた（山本義隆『古典力学の形成』日本評論社、有賀暢迪『力学の誕生』名古屋大学出版会）。そのためここでは、ニュートンの名は冠せず、ただ「運動方程式」と呼ぶことにする。

<sup>6</sup>ニュートンの『プリンキピア（正式には Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica：自然哲学の数学的諸原理）』に沿った説明をする教科書だと、慣性の法則を「運動の第一法則」、運動方程式 (1.2) を「運動の第二法則」と書いていることもある。そしてその場合、「第一法則は第二法則に包含されるのでは？」という疑問に答えるため、力学の第一法則は「慣性系が少なくとも一つこの宇宙に存在すること」を述べているのだと説明されることが多い。

力学の体系の導入の仕方としてはともかく、ニュートンの叙述についての理解としてはこれは恐らく妥当でない説明である。ニュートンは、慣性力もまた力的一种だと（現在の視点からすれば誤って）理解していた側面があり、第一法則は「慣性力（内部力）による運動」、第二法則は「外部力による運動」を述べたものであると考えられている（山本義隆『古典力学の形成』日本評論社）。そのため、現代的な力学理解の下では、第一法則をどう位置付けるかという問題は、力学理解の上では特に考える必要のない問題である。

<sup>7</sup>講義後半では、ラグランジアンを用いることで、力を見抜く必要なく物体の運動を解く系統的方法も紹介する。

ということである。

さらにほとんどすべての場合には、質点  $i$  と質点  $j$  の間に働く力の向きは、二つの質点を結んだ直線の向きに一致する。式で書くと

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji} // (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (1.5)$$

ということである。この性質は、二つの質点間の力は図 2 左のようなものであり、図 2 中央のような力は生じないということを主張している。本講義ではこれを「強い作用・反作用の法則」と呼ぶことにする<sup>8</sup>。位置のみに依存する力（ポテンシャル力）の場合には、知られている範囲では強い作用・反作用の法則は満たされている<sup>9</sup> ので、以降は強い作用・反作用の法則が成り立つものとして議論を進める。

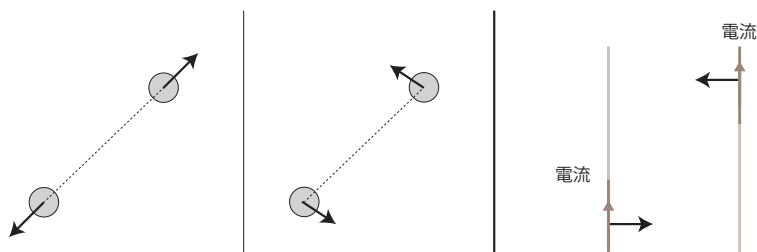


図 2: 左：強い作用・反作用の法則を満たす例（左）と、作用・反作用の法則は満たすが、強い作用・反作用の法則は満たさない例（右）。右：ビオ・サバル則の場合、一見すると強い作用・反作用の法則が破れるように見える。

## 1.4 物理学的な見方の一例としての力学

力学は物理学的な見方の一つのプロトタイプでもある。本講義では、力学という個別の領域を学ぶと同時に、そうした視点も少しずつ見ていきたい。

質点の導入でも少し述べたが、物理においては「近似的な見方」、あるいはより正確にいうと「主要な要素だけを取り出して考える方法」は非常に重要である。そもそもほとんどの物理の記述は「有効記述 (effective description)」であり、物理的な振る舞いのうち最も重要な要素だけに絞り込み、残りの些末な要素を捨てることで得られるものである<sup>10</sup>。例えばボールの運動を解析する際の「ただし空気抵抗はないものとする」という但し書きは、今関心のあるボールの運動を記述する上で、空気抵抗は無視できるような小さな効果しか及ぼさないということを宣言するものである。この仮定が妥当な仮定なのかは、状況設定ごとに検証する必要がある。もし水中で投げたボールの運動を考えているのであれば、水の抵抗を無視するのはよい近似ではないであろう。

これと関連して、有効記述はあくまでも特定の範囲においてのみ有効な記述であることも注意する必要がある。再びボールの例を考えるなら、投げたボールの速さが普通の人間の腕で投げられる速さの範囲であれば空気抵抗を無視してもいいかもしれないが、音速を超えるような速さでボールを発射する実験ならば無視できないかもしれない。この場合、空気抵抗の無視は「速度があまり速くない領域」においてのみ正当化される。もしある運動方程式を解いた結果、速度が無限に速くなるという解が得られたとしたら、それは実際に速度がいくらでも速くなるということではなく、「その運動方程式で無視していた要素が、速度が大きくなると無視できなくなる（もはやその運動方程式で運動が記述されなくなる）」と考えるべきである。

有効記述が正当なのかは、我々の関心のある着目領域において、その有効記述で落としてしまった効果が無視できるほど小さいのか、に依存する。ここで「小さい」というのは、あくまでも比較によってのみ議論できるという点に注意する必要がある。特に（キログラムとかメートルとかの）単位の付く量は、数字の大きさのみを見てその絶対的な大きさを議論しても意味がない。例えば「100kg」という重さは、100 という数

<sup>8</sup>これは特に一般的な呼び方ではない。

<sup>9</sup>一方、速度にも依存するような電磁気力の場合には、この法則が成り立たない（ように見える）例も知られている。運動する電子は電流であり、それは磁場を作る。電流が複数ある場合には、電流間に力が働く。その力はビオ・サバル則 (Biot-Savart law) によって計算できるが、もし二つの電流が図 2 右のように「互いに平行な向きだが真横ではない位置」にある場合、この電流間に働く力は電流の向きに垂直であり、これは強い作用・反作用の法則を破るように見える。（ただしこれは、実際には電磁場を介した相互作用で、電磁場に対する影響まで考えれば、実は強い作用・反作用の法則は成り立っている。一見強い作用・反作用の法則が破れたのは、電磁場を無視したからである）

<sup>10</sup>ただし素粒子物理・高エネルギー物理で探求されている基礎法則は、有効記述ではなく真に普遍的な関係を明らかにしようとしている。しかしその素粒子物理・高エネルギー物理にしても、見つかった法則は「より高エネルギー領域でも成り立つ法則の、低エネルギー領域でのみ成り立つ有効理論」である、という入れ子構造は極めて広範に見ることができる。

字を見ると大きく見えるし、例えば我々人間の体重程度の重さの物体の議論をしているのならば 100kg は全く無視できない重さである。一方、もし議論しているのが惑星の運動であれば、100kg の違いはほとんど無視していいだろう。そもそも 100 という数字は単位に kg を用いたから出現したものであり、t (トン) であれば同じ重さは 0.1t という (見た目には) 小さな数字になる。単位を伴う量の大小を議論するには、今の対象系における「同じ単位を持つ典型的な大きさ」で割って「無次元量 (dimensionless quantity)」にして議論をする必要がある。100kg が大きいのか小さいのかは、100kg が「今我々が着目する現象における典型的な質量」と比べて大きいのか小さいかで判断される、ということである。空気抵抗の場合も、「空気抵抗の大きさ」と「それ以外に加わる力の大きさ」や「典型的な速度」などとの比較で、それが無視できるか否かが決まる。

何らかの項が「小さいが完全には無視できない」という状況を考えよう。こうした状況を系統的に取り扱う近似手法として、「摂動論 (perturbation theory)」は物理学で極めてよく用いられる方法である。例えば、運動方程式が

$$(\text{解くことの出来る主要項}) + \varepsilon \cdot (\text{余計な摂動項})$$

という形をしているとしよう。ただし  $\varepsilon$  は非常に小さい数で、そのため第二項全体も主要項と比べて小さな項となっているとする。このとき、方程式はおおよそ「主要項のみの場合」と同じ形なので、第ゼロ近似 = 余計な摂動項が全く存在しない場合としては、主要項のみで解いた場合の解がそのまま近似解となる。ここから、 $\varepsilon$  は小さいが有限であるとして、この寄与を低次から順に逐次的に取り入れることで近似していく。すなわち、解の形として

$$(\text{主要項のみの場合の解}) + \varepsilon \cdot (\text{一次の摂動項の補正}) + \varepsilon^2 \cdot (\text{二次の摂動項の補正}) + \dots$$

という形を、欲しい精度まで逐次的に導くということである。これを摂動論という。現実的な状況設定において物理の問題が解けることはほとんどないので、「解ける (理想的な) 問題設定」+「摂動」の形で摂動論を用いて解析するのは、物理学のスタンダードな手法である。

無次元量の話が出たので、最後に関連して「次元解析 (dimensional analysis)」という考え方を紹介しておこう。「長さ」「重さ」「時間」など、量の単位の組み合わせを定めるものを「次元 (dimension)」という<sup>11</sup>。例えば力は「(質量) × (長さ) / (時間)<sup>2</sup>」という次元を持つ。少し前に述べたように、大小関係は同じ次元の量同士でないと比較できない (あるいは無次元化する必要がある)。

$A = B$  という形の物理の関係式が成り立つには、左辺と右辺が同一の次元の量でないといけない (長さ = 時間、という関係式はありえない)。このことに着目すると、考察対象の系 (あるいは運動方程式) の持つ量の次元に着目することで、方程式を一切解くことなく、どういう形の関係式しかありえないのかを導ける場合がある。これは「次元解析 (dimensional analysis)」という技法である。例えば、単振動

$$m\ddot{x} = -kx \tag{1.6}$$

の周期を求めたいとしよう (解析的な導出は後の章で行う)。質量  $m$  は (質量)、ばね定数  $k$  は (質量) / (時間)<sup>2</sup>、周期  $T$  は (時間) の次元を持つ。 $m$  と  $k$  で (時間) の次元を持つ量を作るには  $\sqrt{\frac{m}{k}}$  の形しかありえない。よって、周期は  $T = C \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$  の形になるしかないと、方程式を一切解くことなく導ける。ただし  $C$  は無次元の係数で、これがいくつかわかるには具体的に方程式を解く必要がある。しかし定数係数を除けば、次元の考察だけで完全に答えが定まるというのは非常に便利である。

## 1.5 <補論>：運動法則はいかなる意味で非自明な法則なのか

ここで、「力  $F$  の詳細を何も述べていない式 (1.2) の形では、運動の形が何も指定されておらず、これを (物理現象の観察に基づいて経験的に得られるはずの) 物理法則と呼ぶのは変ではないか」と思う人もいるかもしれない。確かに力  $F$  を定めていない段階では、運動の詳細はほとんど分からない。しかし、運動方程式 (1.2) は、以下のような重要な観察事実を述べている。

- 「現在の位置  $r$ 」の情報のみでは、未来の運動を決定するには不十分である (現在の位置は同一だが、未来の運動は異なるような状態の組が存在する)

<sup>11</sup> 「平面は二次元だが立体は三次元である」などというときの次元とは意味が異なるので注意。

- 「現在の位置  $r$  及び速度  $v = \dot{r}$ 」の情報だけで、未来の運動は完全に決定される（現在の加速度  $\ddot{r}$  のような情報は不要だということ）。

前者は、「同一の位置にあるが異なる速度を持つ質点は、その後の運動も異なる」ということを述べている。後者を理解するために、図3のような、二通りのレールに沿って動く質点AとBを考えることにする。このレールに沿って運動した結果、レールがなくなる場所で質点AとBはともに「同じ位置  $r$ 、同じ速度  $v$ 」だが、異なる加速度  $a := \ddot{r}$ （これまでの速度変化の仕方）」を持っているとしよう。このとき、以下の二通りの可能性がある。

1. 質点AとBは、これまでの速度変化の仕方が異なるので、現在の加速度（速度変化の惰性）にしたがって、レールがなくなった後は異なる運動をする（未来の運動が現在の加速度にも依存する場合）
2. 質点AとBは、現在の位置と速度が同じなので、レールがなくなった後は同じ運動をする（未来の運動が現在の加速度に依存しない場合）

我々のいる世界では、2が正しい（未来の運動は現在の加速度に依存しない）ということ運動方程式(1.2)は示している。「位置と位置の一階微分のみで未来は完全に決定され、二階微分以上は影響を及ぼさない」ということは、アприオリには知りえず<sup>12</sup>、物理現象の観察によってはじめて確立される立派な物理法則である。

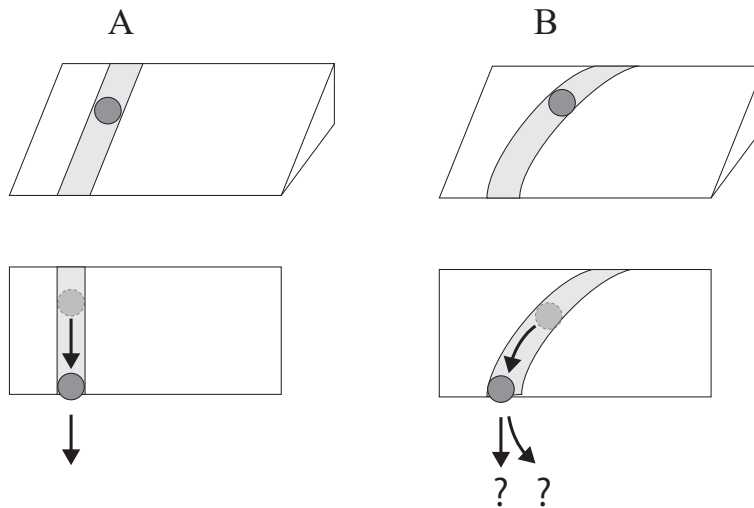


図3: まっすぐ滑り降りた質点Aと曲がりながら滑り降りた質点B（上図は斜め上から、下図は真上から見たもの）。もし加速度がその後の運動に影響を及ぼすのなら、AとBの運動は異なるものになる。一方、もし速度まででその後の運動が全て決定されるのなら、AとBは同じ運動を示すはずである。

<sup>12</sup> 「アприオリ (a priori) な性質」というのは、定義に対する論理操作や数学的な変形のみで導かれる性質、つまり「この世界がどんな世界であっても必ず成立してしまう性質であり、この世界がどのような世界なのかを調べる必要なく示してしまう性質」のことである。本文で述べたように、「この世界が、位置とその一階微分のみで未来が全て決定される世界であること」は全く必然ではない（例えば、この世界が「位置とその一階微分及び二階微分の三つ組で未来が全て決定される世界」である可能性は、世界を観察すること抜きには排除されない）ので、運動方程式はアприオリな性質ではない。

## 2 保存則

この章では、力学において幅広く成り立つ様々な「保存則 (conservation law)」を導く<sup>13</sup>。保存則は、何らかの量が時間が経っても変化せず一定であることを示す関係式である。保存則があると、時間が経った後にどういった状態にしかねないのか、が厳しく制限されるので、運動方程式を解かずとも将来の運動の様子について様々な情報を得ることができる。ただし保存則が成り立つには一定の適用条件があるので、どういときに保存則が成り立つか、あるいは成り立たないか、をきちんと理解することも併せて重要である。

この章で示す保存則は、結果のみは高校の物理の授業でも習っていると思うので、ここではその導出過程、数学的な記述方法、及び適用条件に絞って簡潔に議論することにする。詳細な説明や具体例を知りたい人は高校の教科書などで復習してもらいたい。

### 2.1 運動量保存則

質量にその物体の速度をかけたものを「運動量 (momentum)」と呼び、 $\mathbf{p} := m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{v}$  と表す。力を受けた質点の運動量の変化は、運動方程式 (1.2) を時間積分することで得られる。式 (1.2) を時刻  $t = 0$  から  $t = \tau$  まで積分すると

$$\mathbf{p}(\tau) - \mathbf{p}(0) = \int_0^\tau m \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = \int_0^\tau \mathbf{F}(t) dt \quad (2.1)$$

となる。最右辺は、力を時間で積分したもので、これは「力積 (impulse)」と呼ばれる。この式は、質量が大きければ大きいほど、同じだけ速度を変化させるのにはより大きな力が必要であるということを示している (そこそこなスピードのサッカーボールなら足で止められても、同じ速度の車が足に衝突したら大事故である)。

複数の質点の運動を考えよう。質点に働く力は、外部から働く力 (外力)  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  と、質点同士の間働く力  $\mathbf{F}^{\text{in}}$  の和

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{\text{ext}} + \sum_j \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} \quad (2.2)$$

と分解できる。ここでは特に、外力がゼロである状況を考えよう (例えば二つの物体が衝突して速度を変える状況はこれに当たる)。このとき、 $i$  番目の質点の運動方程式は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = \sum_{j(\neq i)} \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} \quad (2.3)$$

と書ける。ここで、この式を全ての質点  $i$  について和をとると

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_{j,i(j\neq i)} \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{j,i(j\neq i)} (\mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} + \mathbf{F}_{ij}^{\text{in}}) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

が得られる。ここで、最後の等号では作用・反作用の法則  $\mathbf{F}_{ij}^{\text{in}} = -\mathbf{F}_{ji}^{\text{in}}$  を用いた<sup>14</sup>。よって、外部から力が働かない場合、全運動量  $\sum_i \mathbf{p}_i$  は時間変化せず一定値をとる。これを「運動量保存則 (law of momentum conservation)」という。

運動量保存則は成分ごとに成り立つので、三次元空間中であれば式 (2.4) は三種類の異なる保存則が成り立つことを主張している。また、成分ごとに成り立つ関係式であるため、例えば「 $y$  方向には外力は働いているが、 $x$  方向には外力は働いていない」という状況の場合、 $x$  方向の運動量保存則は相変わらず成り立つ。

### 2.2 エネルギー保存則

次にエネルギー保存則を導出する。エネルギー保存則は一般の次元で成り立つ関係式である。だが、3次元のエネルギー保存則を導出しようと思うと、偏微分、線積分、ナブラなどの見慣れない数学の記号や概念 (これらはベクトル解析で習う) を用いる必要がある。そのため、一般的な場合の証明は後述の補論に回し、

<sup>13</sup> 「保存【則】」と、「法則 (観察に基づいて得られた物理の体系の公理)」であるような書き方をしているが、この講義の立場では、保存則は運動方程式 (1.2) から導出される「定理」である。

<sup>14</sup> 運動量保存則の導出においては、強い作用反作用の法則は必要ない。

ここでは1次元の場合で考えることにする。1次元であればこれらの新しい概念は不要になり、ただの微分や積分だけで議論を済ませることができる。ここでは1次元のみで導出を与えるが、導出される結果そのものは、一般の次元において正しいものである。

質量  $m$ 、速度  $v$  の質点の「運動エネルギー (kinetic energy)」を  $K = \frac{1}{2}mv^2$  で定義する。まず簡単のため、力  $F$  が位置  $x$  にのみ依存し、時刻  $t$  には依存しないとす。このとき運動エネルギーの時間変化は、運動方程式 (1.2) に速度をかけて積分することで

$$K(\tau) - K(0) = \int_0^\tau m \frac{dv(t)}{dt} v(t) dt = \int_0^\tau F(x(t)) v(t) dt = \int_0^\tau F(x(t)) \frac{dx}{dt} dt = \int_{x(0)}^{x(\tau)} F(x) dx \quad (2.5)$$

が得られる。一つ目の等式では  $\frac{d}{dt} K = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2}mv^2) = m \frac{dv}{dt} v$  を用いた。また最後の等式では  $F$  が時間への依存性を持たないことを用いた。

式 (2.5) の最右辺は、加えられた力に沿ってどれだけ質点が移動したかを表す量であり、これを質点がされた「仕事 (work)」と呼ぶ。力が位置  $x$  にのみ依存するならば<sup>15</sup>、これは始状態と終状態にのみ依存し、途中の動かし方にはよらない (一般次元の場合には、通過経路  $C$  にのみ依存し、質点が経路  $C$  をどのような速さで通過したかには依存しない量となる)。

1次元の場合、力  $F(x)$  はポテンシャル  $U(x)$  を用いて

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (2.6)$$

と表せる (2次元以上では、一般の力はポテンシャルの偏微分では表せない。このように記述できると仮定することは、追加の仮定を置くことになる)。このとき、微分積分学の基本定理  $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$  により

$$\int_{x(0)}^{x(\tau)} F(x) dx = - \int_{x(0)}^{x(\tau)} \frac{dU}{dx} dx = U(x(0)) - U(x(\tau)) \quad (2.7)$$

となることが示せる。

さて、運動エネルギー  $K$  に「ポテンシャルエネルギー (potential energy: 位置エネルギーとも)」  $U$  を加えたもの、 $E = K + U$  を、質点全体の「エネルギー (energy)」と呼ぶことにする。すると、ポテンシャル力以外に外から力は加わっていない状況では、上の計算により

$$K(\tau) - K(0) = \int_{x(0)}^{x(\tau)} F(x) dx = U(x(0)) - U(x(\tau)) \quad (2.8)$$

が成り立つので、 $E = K + U$  は時間変化しない。これを「エネルギー保存則 (law of energy conservation)」という。物体が複数あり、物体間に相互作用が働いている場合にも、相互作用がポテンシャル  $U(x_i, x_j)$  を用いて

$$F_{ji} = -\frac{\partial}{\partial x_i} U, \quad F_{ij} = -\frac{\partial}{\partial x_j} U \quad (2.9)$$

と書けるならば、やはり同様にエネルギー保存則は成り立つ。そのため、例えば二つの粒子がばねでつながれて運動している状況では、「各粒子の運動エネルギー + 各粒子のポテンシャルエネルギー + ばねのポテンシャルエネルギー」の全エネルギーは (外力がなければ) 保存する。

1次元の物体の衝突において、はね返り係数が1である衝突を「完全弾性衝突 (elastic collision)」という。ただしはね返り係数  $e$  は、衝突前後の2物体 A, B の速度をそれぞれ  $v_A, v_B, v'_A, v'_B$  とすると、

$$e = -\frac{v'_B - v'_A}{v_B - v_A} \quad (2.10)$$

で定義される。特に両物体が外力を受けずに運動している場合には<sup>16</sup>、完全弾性衝突とエネルギー保存は等価である。この事実を確認しておこう。物体 A, B の質量を  $m_A, m_B$  とすると、運動量保存則とエネルギー

<sup>15</sup> 力  $F$  が時刻  $t$  にも依存する場合、仕事は  $\int_0^\tau F(x(t), t) \dot{x}(t) dt$  と書ける。

<sup>16</sup> より一般に、撃力を受けている状況 (一方の物体が固定されているなど) でないならば、完全弾性衝突のエネルギー保存の等価性は成り立つ。



保存則はそれぞれ

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B \quad (2.12)$$

と書ける。これは

$$m_A (v_A - v'_A) = -m_B (v_B - v'_B) \quad (2.13)$$

$$m_A (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = -m_B (v_B - v'_B)(v_B + v'_B) \quad (2.14)$$

と変形できるが、式 (2.14) を式 (2.13) で割ることにより、はね返り係数  $e = 1$  の式を得る。逆に  $e = 1$  なら  $v_A + v'_A = v_B + v'_B$  なので、これを式 (2.13) にかけることによりエネルギー保存則 (2.14) を得る。

なお、2次元以上の空間中の物体の衝突の場合には、衝突面に垂直な方向に対して式 (2.10) が成り立つことを完全弾性衝突という<sup>17</sup>。その場合にも外力がなければエネルギー保存との等価性は相変わらず成り立つ。

**[2-1] (おはじきの衝突と散乱) :** 同じ重さのおはじきを二つ用意する。一方を机に静止させて置き、もう一方を滑らせてぶつける状況を考えよう (図 4)。このとき、外力が働かないならば、衝突後の二つのおはじきの飛んでいく向きのなす角度は直角になることを示せ。(気になる人はコインなどで実際に実験してみよ。直角で飛んでいくことは確認できると思う)。

また、実際にコインの実験をしてみると、摩擦の無視できない机の上でも直角に飛んでいく状況は再現できる。摩擦という外力があるにもかかわらずなぜこの結果は再現できるのか考察せよ。

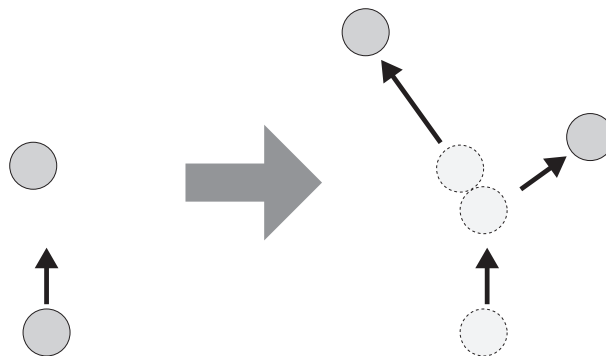


図 4: 二つのおはじきの衝突実験の模式図。

**[2-2]** 図 5 のような、摩擦のないレール上に二つの質点 1,2 がある。レールは中央部分は水平、両端はそれぞれ上に上がっていくように傾いている。系全体には重力加速度  $g$  の一様重力がかかっている。

質点 1 を左の傾いたレール上に、質点 2 を中央の水平なレール上に、それぞれ初速度を持たないように置いた。すると質点 1 はレールを右向きに滑り降り、質点 2 と完全弾性衝突した。衝突後、質点 1 は左向きに、質点 2 は右向きに運動をはじめ、両質点は全く同じ高さまで登った後、向きを変えて下り始めた。

水平なレールを基準として、最初に質点 1 を置いた地点の高さを  $h$  とする。衝突後に両質点が最初に向きを変える地点の高さを求めよ。

<sup>17</sup> 衝突面に水平な方向の運動については、すべり条件や摩擦などの条件に依存している。



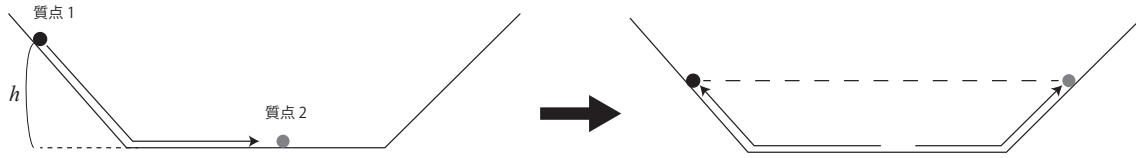


図 5: 二つの質点の運動の様子

## 2.3 (数学): 外積

ここでは、次の節の説明のため、3次元実ベクトル<sup>18</sup> 同士の「外積 (exterior product<sup>19</sup>)」の性質をみておこう。

二つの3次元ベクトル  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  の間の外積  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  が与えるベクトルは、二つのベクトルのなす角の大きさを  $\theta$  とすると、

- 長さは  $|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\theta$  ( $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  のなす平行四辺形の面積)
- 向きは  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  とともに垂直な向き (これだけだと上下二方向ありうるが、 $\mathbf{A}$  から  $\mathbf{B}$  に回す際に右ねじの向きとなる方向にとる)

となるようにとる。第一の性質により、同じベクトル同士の外積はゼロである ( $\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$ )。外積を成分表示すると

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

と書ける<sup>20</sup>。内積は一般の次元のベクトルに対して定義されているのに対し、外積は3次元ベクトル同士でしか定義されていない点に注意しておこう<sup>21</sup>。

[2-3]  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  は互いに平行ではなく直交もしていない非ゼロの3次元実ベクトルとする。以下のベクトル  $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$  について、正しく述べているものを下の選択肢からそれぞれ選べ。

$$\mathbf{V}_1 := ((\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{V}_2 := (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{A})) \quad (2.17)$$

選択肢

1. このベクトルは  $\mathbf{A}$  と平行な非ゼロのベクトルである
2. このベクトルは  $\mathbf{B}$  と平行な非ゼロのベクトルである

<sup>18</sup>複素ベクトルの場合の外積はあまり考えないが、外積の満たす諸々の関係式を成り立たせるように定義を拡張するには、実ベクトルで定義されたような外積をとった後に全体の複素共役をとるとうまく定義できる。

<sup>19</sup>内積が「inner product」なので、外積は「outer product」かなと思うかもしれないが、「outer product」は二つのベクトルの直積・テンソル積のことを指し、ここでいう外積とは異なるものを指している。

<sup>20</sup>これが向きの条件  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  と直交) を満たすことは直接内積を計算することで簡単に確認できる。長さについては、煩雑だが頑張ると  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|^2 = |\mathbf{A}|^2 |\mathbf{B}|^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2$  が示せるので、ここから長さの条件を満たすことが言える。

もう少し工夫した成分表示の導出方法としては、定義から分配法則  $(\mathbf{C} + \mathbf{D}) \times \mathbf{A} = \mathbf{C} \times \mathbf{A} + \mathbf{D} \times \mathbf{A}$  が成り立つことが確認できるので、これを用いてベクトルを単位ベクトルに展開し、各単位ベクトルごとに外積を計算することでこの成分表示が成り立つことを確認するのが早い。

<sup>21</sup>実は外積をとると、もともと3階の1テンソルだったベクトルが、3階の2テンソルに移されるが、3階の2テンソルも3階の1テンソルと同様に3変数で指定されるので、両者が自然に同一視でき、その結果3次元の場合にはベクトルを出力に持つような外積が定義出来る (正確にはホッジ作用素というものを使って双対をとっている)。一般次元の場合には、一般のベクトル空間  $V$  に対し、 $a, b \in V$  から  $a \wedge b \in V \wedge V$  への「ウェッジ積 (wedge product)」として

- 交代性:  $a \wedge a = 0$
- 分配則:  $(pa + qb) \wedge c = p(a \wedge c) + q(b \wedge c)$  ( $p, q \in \mathbb{C}$  or  $\mathbb{R}$ )
- 結合則:  $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

を満たすものが定義できる。このような演算が定義された代数を外積代数という。 $(a + b) \wedge (a + b) = 0$  より、重要な性質である交代性  $a \wedge b = -b \wedge a$  が導ける。外積代数は、微分形式の理論を展開するうえで基礎となる記述枠組である。

3. このベクトルは  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  と平行な非ゼロのベクトルである
4. このベクトルは  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  のどれとも平行でない非ゼロのベクトルである
5. このベクトルはゼロベクトルである

(注：すぐ下にベクトル三重積の公式があるが、これを用いてもベクトルの向きを考える上ではあまり役に立たない。外積をとるとベクトルの向きがどうなるのかを頭の中でイメージしながら解く方がよい。)

外積をとった後に内積をとる計算をする際、以下のスカラー三重積の公式

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \quad (2.18)$$

が役立つことがある。また、外積を2回とる状況も力学の計算ではしばしば出現するが、これを計算するには、ベクトル三重積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (2.19)$$

が便利である。これらの関係式は成分を直接計算すれば正しいことが確認できる。

## 2.4 角運動量保存則

ある点から見た質点の「回転の度合い」を与える量として「角運動量 (angular momentum)」を導入しよう。原点周りの質点の角運動量  $\mathbf{L}$  は、原点からの質点の位置  $\mathbf{r}$  とその質点の運動量  $\mathbf{p}$  との間の外積

$$\mathbf{L} := \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} \quad (2.20)$$

で定義される。原点以外の点を基準点にとった場合には、その基準点から質点の位置までのベクトルが  $\mathbf{r}$  となる。質点が複数ある場合には、全ての質点の角運動量を足し合わせたものを、その質点たち全体の角運動量と定義する。

$$\mathbf{L} := \sum_i \mathbf{L}_i \quad (2.21)$$

角運動量の時間変化は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times m\dot{\mathbf{r}}_i) = \sum_i \mathbf{r}_i \times m\ddot{\mathbf{r}}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \times m\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.22)$$

と計算できる。ただし最後の等式では同じベクトル同士の外積がゼロとなることを用いた。最右辺の和の中の  $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  は、質点  $i$  の回転運動を変化させる度合いを与える量である。これを、質点  $i$  に対する「トルク (torque)」という。

特に複数の質点がある系で、外部からのトルクがかかっていない状況を考えよう。外部からトルクが働かない状況としては、外力そのものが存在しない状況以外に、原点 (基準点) の向きの力が各質点にかかっている状況がある。例えば、太陽の周りを運動する惑星は、惑星に働く力は太陽の向きの万有引力なので、太陽を原点にとった場合にはトルクは働かない (この問題は後の章で扱う)。外力が上記の条件を満たすとき、強い作用反作用の法則が成り立つとすると、角運動量は

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L} = \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}^{\text{in}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji}^{\text{in}} = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

と、時間変化しないことが分かる。これを「角運動量保存則 (law of angular momentum conservation)」と呼ぶ。運動量保存則と同じく、角運動量保存則もまた成分ごとに成り立つ。例えば、質点に働く力が全て  $z$  軸に垂直な向きである場合、 $z$  方向の角運動量  $L_z$  は保存する (一般には  $L_x$  と  $L_y$  は保存しない)。

## 2.5 <補論>：一般次元のエネルギー保存則

質量  $m$ 、速度  $\mathbf{v}$  の質点の「運動エネルギー (kinetic energy)」を  $K = \frac{1}{2}mv^2$  で定義する。ただし  $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  は速度ベクトルの大きさ (速さ) である。まず簡単のため、力  $\mathbf{F}$  が位置  $\mathbf{r}$  にのみ依存し、時刻  $t$  には依存しないとする。このとき運動エネルギーの時間変化は、運動方程式 (1.2) に速度をかけて積分することで

$$K(\tau) - K(0) = \int_0^\tau m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^\tau \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_0^\tau \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.24)$$

が得られる。ただし  $\cdot$  は内積を表している。一つ目の等式では  $\frac{d}{dt}K = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$  を用いた。また最後の等式では  $\mathbf{F}$  が時間への依存性を持たないことを用いた。

最後の積分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は「線積分 (line integral)」と呼ばれる積分である。ただし  $C$  は質点の通過した軌道を与える曲線である。線積分は以下のように定義される。曲線  $C$  を微小な  $N$  区間に分割し<sup>22</sup>、その  $n$  番目の点を  $\mathbf{r}_n$  とする。曲線  $C$  を、隣り合う点を結ぶような折れ線で近似する (図 6)。 $n$  個目の折れ線は  $\Delta\mathbf{r}_n := \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}$  で与えられる。このとき、線積分  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  は

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta\mathbf{r}_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N F_x(\mathbf{r}_n)\Delta x_n + F_y(\mathbf{r}_n)\Delta y_n + F_z(\mathbf{r}_n)\Delta z_n \quad (2.25)$$

と定義する。上の折れ線による定義からも見て取れるように、線積分は、ベクトル  $\mathbf{F}$  のうち特に曲線の向きに沿った成分のみを取り出して、その大きさを積分したものである。あるいは、 $d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$  なので、線積分は xyz 方向それぞれについて  $F_x, F_y, F_z$  を (経路に沿って) 積分し、最後に足したものと見てもよい。

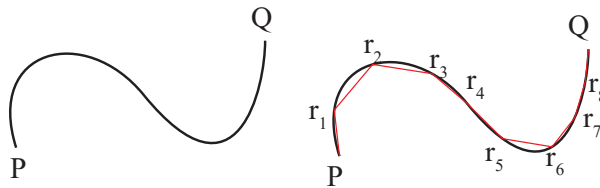


図 6: 線積分をとる際、曲線を細かい折れ線で近似する考え方。

式 (2.24) の最右辺は、加えられた力に沿ってどれだけ質点が移動したかを表す量であり、これを質点がされた「仕事 (work)」と呼ぶ。力が位置  $\mathbf{r}$  にのみ依存するならば、これは経路  $C$  にのみ依存し、質点が経路  $C$  をどのような速さで通過したかには依存しない量となる。

特に力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  がポテンシャル  $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$  を用いて

$$\mathbf{F} = -\nabla U := - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

と表されているとする (これは追加の仮定である)。ただし  $\frac{\partial}{\partial x}$  は  $x$  による「偏微分 (partial differential)」であり、これは他の変数を定数とみなして行う微分である。また  $\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$  は「ナブラ (nabla)」という演算子で、ベクトル解析でよく用いられる演算子である<sup>23</sup>。このとき、 $C$  の始点と終点をそれぞれ  $\mathbf{r}_0$  と

<sup>22</sup>分割の方法は任意 (等分割でなくてよい) だが、すべての区間は  $N \rightarrow \infty$  で長さがゼロになることは要請する。この方法で、線積分が well-defined である (曲線の分割に仕方によって値が依存しない) ことは証明出来る。

<sup>23</sup>教科書によっては  $\nabla U$  を  $\text{grad } U$  と書き、「 $U$  の勾配 (gradient)」と呼ぶこともある。

$r_N$  と書くことにすると、微分積分学の基本定理  $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$  と同様にして

$$\int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_N) - U(\mathbf{r}_0) \quad (2.27)$$

となることが示せる。特に左辺の線積分の値は、経路の始点と終点にのみ依存し、途中の経路の詳細によらなくなる。

さて、運動エネルギー  $K$  に「ポテンシャルエネルギー (potential energy : 位置エネルギーとも)」 $U$  を加えたもの、 $E = K + U$  を、質点全体の「エネルギー (energy)」と呼ぶことにする。すると、ポテンシャル力以外に外から力は加わっていない状況では、

$$K(\tau) - K(0) = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla U \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_0) - U(\mathbf{r}_N) = U(0) - U(\tau) \quad (2.28)$$

が成り立つ。つまり、 $E = K + U$  は時間変化しない。これを「エネルギー保存則 (law of energy conservation)」という。物体が複数あり、物体間に相互作用が働いている場合にも、相互作用がポテンシャル  $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$  を用いて

$$\mathbf{F}_{ji} = -\nabla_i U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} \\ \frac{\partial U}{\partial y_i} \\ \frac{\partial U}{\partial z_i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_{ij} = -\nabla_j U = - \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_j} \\ \frac{\partial U}{\partial y_j} \\ \frac{\partial U}{\partial z_j} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

と書けるならば、やはり同様にエネルギー保存則は成り立つ。そのため、例えば二つの粒子がばねでつながれて運動している状況では、「各粒子の運動エネルギー + 各粒子のポテンシャルエネルギー + ばねのポテンシャルエネルギー」の全エネルギーは (外力がなければ) 保存する。

## 2.6 <補論> : コマの運動の定性的説明

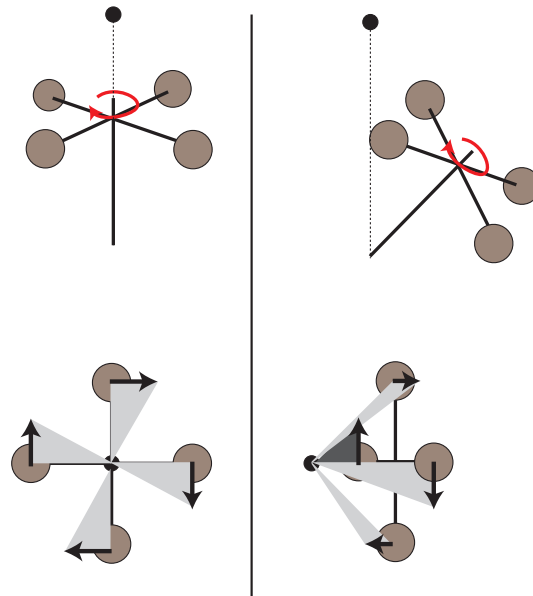


図 7: 左: まっすぐの軸で回転しているコマ。右: 回転軸が少し傾いたコマ。下図はそれぞれを  $z$  軸真上から見た図。グレーの面積が角運動量 (の半分)。コマが傾いたことによって、 $z$  軸の角運動量が変化している。なお、濃いグレーの部分はマイナスで角運動量に寄与する点に注意。

これまで見てきた保存則の応用例として、コマが倒れない仕組みを考えることにしよう。定量的な解析はこの講義の後半で扱うので、ここでは「コマが倒れない」という定性的な側面にだけ絞って簡潔に取り扱うことにする。(コマが倒れないぐらいではたいして面白くもないと感じる人は、地球ゴマの一方の端を固定

したうえで軸を水平にして回すと、コマが重力に従って落ちずに水平な姿勢を保って回り続ける<sup>24</sup> 現象などを思い浮かべてほしい。

簡単のため、コマのモデルとして「軸のある点から四方に横棒が伸び、その先端に質点を取り付けられている」というものを考えることにしよう（図 7）。コマの接地点は動かず、また摩擦もないものとする。このコマは軸を中心に反時計回りに回転している。質点に働く外力は鉛直下向きの重力のみとする。

今、コマの軸が地面方向に少し倒れたとしよう。このとき、この系の原点における  $z$  軸方向の角運動量を考えよう。下向きの重力は  $z$  軸に平行であり、また棒の抗力も原点を通過する力なので、 $z$  軸方向の角運動量は保存する。だが、この系を真上から見ると、図 7 のようにコマが倒れることで  $z$  軸方向の角運動量は減少してしまう。そのため、この減少を埋め合わせるように、コマの軸自体が  $z$  軸を中心に回り始める。これがコマの首振り運動、あるいは「歳差運動 (precession motion)」である。

このように、コマが倒れるとその分だけコマの軸自体が  $z$  軸周りに回転しないといけないが、あまり速く回転することはエネルギー保存則で禁止されている。コマのエネルギーは保存しているので、「コマの軸の歳差運動に伴う運動エネルギー」は「コマが倒れたことによって獲得した重力のポテンシャルエネルギー」と釣り合わないといけない。コマが素早く回転している場合、運動量保存則を埋め合わせるのに必要な  $z$  軸周りの軸の回転速度もまた大きくなる、すなわちそれに必要な運動エネルギーも大きくなるが、コマが倒れることで獲得できる重力のポテンシャルエネルギーはあまり大きくない。そのため、コマは重力に従って倒れることが出来ず、首振り運動を続けるのである。

---

<sup>24</sup> 「地球ゴマの色々な遊び方」 [https://www.youtube.com/watch?v=yi9dKXH\\_MAQ](https://www.youtube.com/watch?v=yi9dKXH_MAQ) の 3 分 30 秒あたりから動画が見れる

### 3 (数学)：微分方程式

本章では、力学の問題の数学的基礎である微分方程式について簡単に扱う<sup>25</sup>。

#### 3.1 演算子の考え方、微分方程式の分類

微分方程式 (differential equation) を実際に解く前に、もう少し抽象的な視点から微分方程式を眺めておこう。

「関数」というのは、数を入力すると数が出されるようなものであった。例えば、 $f(x) = x^2 + 2x$  という関数は、数の入力に対し

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 3$$

$$2 \rightarrow 8$$

⋮

のように数を出力するものである。そして、「方程式  $f(x) = 8$ 」という問題は、「関数  $f$  に何を入力したら 8 が出力されるのか」を考える問題だと見ることが出来る (上の例なら答えは  $x = 2, -4$ )。

関数は入出力が数であったが、「演算子 (operator)<sup>26</sup>」は関数を入力すると関数を出力するものである。演算子の代表例としては「微分」がある。これは様々な関数の入力に対し

$$x^2 \rightarrow 2x$$

$$\sin x \rightarrow \cos x$$

$$\ln x \rightarrow \frac{1}{x}$$

⋮

のように関数を出力するものである。もっと簡単な演算子としては「関数に 1 を足す」「関数に  $x^2$  をかける」「関数を 3 乗する」などもある。

$y$  を  $x$  の関数  $y(x)$  とし、演算子  $\mathcal{F}(y)$  として「 $y$  を微分して、さらに  $y$  の  $-1$  倍を足す」というものを考えよう。つまり、 $\mathcal{F}(y) = y' - y$  である ( $y'$  で  $y$  の微分を表す。以下同)。微分方程式は、例えば

$$\mathcal{F}(y) = e^x \tag{3.1}$$

という形で与えられる。これは、

$$y' - y = e^x \tag{3.2}$$

という微分方程式のことである。この微分方程式は「 $\mathcal{F}$  に何を入力したら  $e^x$  が出力されるのか」を考える問題だと見ることが出来る (答えは  $y = xe^x + Ce^x$ 、ただし  $C$  は任意定数)。このように考えると、微分方程式というもの、普通の (二次方程式などの) 方程式と同じように「方程式」と呼ばれている理由が分かる。

さて、任意の  $x$  の関数  $y, z$ 、任意の数  $a, b$  について、

$$\mathcal{F}(ay + bz) = a\mathcal{F}(y) + b\mathcal{F}(z) \tag{3.3}$$

が成り立つとき、この演算子は「線形 (linear)」であるという。任意の階数の微分演算子、積分演算子、掛

<sup>25</sup>本章及び次章の内容に対応する、微分方程式の物理学者向けの簡単な解説としては、田崎晴明『数学 物理を学び楽しむために』第 5 章および第 8 章がある。また、もう少し数学的だが読みやすい教科書としては、稲見武夫『常微分方程式』岩波書店がある。ただしどちらの議論の仕方、この講義テキストでの議論の仕方とはやや異なる。

<sup>26</sup>「作用素」ともいう。物理を念頭に置いた文脈では「演算子」、数学を念頭に置いた文脈では「作用素」ということが多い。英語はどちらも「operator」なので、両者は同じものを指しており、あくまでも翻訳の問題に過ぎない。

け算（関数を2倍する、関数に $x^3$ を掛ける、など）はすべて線形演算子である。線形演算子の和も線形演算子になる。一方、べき乗（関数を2乗する）や足し算（関数に1を足す）などは一般に非線形な演算子である。

本題に入る前にいくつか言葉の定義をしておこう。例えば、以下のような微分方程式を考えよう。

$$\frac{d^2}{dx^2}y + a\frac{d}{dx}y + by = f(x). \quad (3.4)$$

ここで、 $a, b$ は定数である。このように、未知関数 $y$ がただ一つの変数（この場合は $x$ ）を持つ微分方程式を「常微分方程式 (ordinary differential equation)」という<sup>27</sup>。

- $n$  階 ( $n$ -th order) の微分方程式
  - 式 (3.4) は微分の最高次が  $n = 2$  なので ( $\frac{d^2y}{dx^2}$  のこと)、2 階の微分方程式である。
- 斉次 (homogeneous) ・ 非斉次 (inhomogeneous) 方程式
  - 斉次<sup>28</sup>: 式 (3.4) で  $f(x) = 0$  の場合。
  - 非斉次: 式 (3.4) で  $f(x) \neq 0$  の場合。
- 線形 ・ 非線形
  - 線形: 式 (3.4) のように、左辺の  $y$  に対する演算子が線形演算子であるもの。
  - 非線形: 左辺の  $y$  に対する演算子が線形演算子ではないもの。 $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + by = 0$  や  $\frac{dy}{dx} + by^2 = 0$  などは非線形である。
- 定数係数か否か
  - 定数係数: 式 (3.4) のように、微分にかかっている係数  $a, b$  が定数であるもの。
  - それ以外: 例えば  $\frac{d^2y}{dx^2} + x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y = 0$  は、一階の微係数にかかっている係数が定数ではなくて  $x$  なので、これは定数係数ではない線形微分方程式である。

後で見ると、線形の定数係数微分方程式は機械的に解くことができる。

微分方程式の解を、いくつかのパラメータ付きの形で表したものを「一般解 (general solution)」、パラメータに特定の値を入れた解を「特解 (particular solution)」と呼ぶ。一般に、 $n$  階の微分方程式においては、初期値パラメータが  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  の  $n$  個あり、それに応じて  $n$  階微分方程式の一般解にもパラメータが  $n$  個ある<sup>29</sup>。

なお慣習的に、微分を

$$y' := \frac{d}{dx}y, \quad y^{(n)} := \frac{d^n}{dx^n}y \quad (3.5)$$

と表記する。本章では、途中までは  $\frac{d}{dx}$  を明確に書くが、途中からは略記も並行して用いる。

## 3.2 定数係数線形斉次微分方程式

ではまず、もっとも単純な微分方程式である、定数係数線形斉次微分方程式

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dx}y + a_0y = 0 \quad (3.6)$$

を考えよう。ただし  $y$  は  $x$  を引数に持つ関数  $y(x)$  のことで、 $a_{n-1}, \dots, a_0$  は定数である。以下引数は省略することが多い。

<sup>27</sup> 未知関数が複数の変数を持つ微分方程式は「偏微分方程式 (partial differential equation)」という。ここでは常微分方程式のみを取り扱う。

<sup>28</sup> 「せいじ」と読む

<sup>29</sup> どのような微分方程式がこの性質を持つと言えるかの詳細は、3.9 節を見ていただきたい。



非常に重要な性質として、定数係数線形斉次微分方程式は一般解が存在する。そのため、定数係数線形斉次微分方程式は必ず解くことができる。ここではその導出を見ることにしよう。

まず、一階の場合

$$\frac{dy}{dx} + ay = 0 \quad (3.7)$$

を考えよう。この微分方程式は「 $y(x)$  は、微分すると自分と同じ形（ただし  $-a$  倍）が出てくる関数である」と述べている。微分しても同じ形になる関数は指数関数であることをすでに知っているのので、指数関数

$$y(x) = Ce^{-ax} \quad (3.8)$$

が解であると分かる<sup>30</sup> ( $C$  は初期値に依存するパラメータ)。  $y$  に作用する演算子を全体としてくくると、この微分方程式 (3.7) は

$$\left[ \frac{d}{dx} + a \right] y = 0 \quad (3.9)$$

とも書ける。

この見方は、二階以上の定数係数線形斉次微分方程式の一般的構造を理解するうえで役に立つものである。二階の定数係数線形斉次微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy = 0 \quad (3.10)$$

を考えよう<sup>31</sup>。ただし  $p, q$  は定数（一般には複素数）である。これは

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + (p+q)\frac{d}{dx} + pq \right] y = 0 \quad (3.11)$$

とも書ける。ここで演算子を「因数分解<sup>32</sup>」して

$$\left[ \frac{d}{dx} + p \right] \left[ \frac{d}{dx} + q \right] y = \left[ \frac{d}{dx} + q \right] \left[ \frac{d}{dx} + p \right] y = 0 \quad (3.12)$$

とすると、この微分方程式は一階の場合に出てきた演算子の積の形になっている。ただしこの意味は、式 (3.12) の左辺ならば「関数  $y$  に演算子  $\frac{d}{dx} + q$  がまず作用して何か別の関数になり、それに続けて演算子  $\frac{d}{dx} + p$  が作用する」ということである。より一般に、微分演算子  $\frac{d}{dx}$  を未知変数  $s$  と置きなおして得られる  $s$  についての方程式の解を  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 、それぞれの解の縮重度（重解の個数）を  $n_i$  とすると、この微分方程式は

$$\prod_i \left[ \frac{d}{dx} - \lambda_i \right]^{n_i} y(x) = 0 \quad (3.13)$$

と因数分解できる。

まず  $p \neq q$  の場合に微分方程式を解こう。因数分解 (3.12) の形と微分方程式の線形性より、

$$\left[ \frac{d}{dx} + q \right] y_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$\left[ \frac{d}{dx} + p \right] y_2 = 0 \quad (3.15)$$

を満たす  $y_1, y_2$  を用いて

$$y = y_1 + y_2 \quad (3.16)$$

と書ける  $y$  は、元の微分方程式 (3.10) を満たす。  $y_1, y_2$  の解はすでに知っているのので、これを代入すると

$$y(x) = C_1 e^{-qx} + C_2 e^{-px} \quad (3.17)$$

<sup>30</sup> 指数関数しか解がないことをここでは確認していないが、最後に見る変数分離法を適用することで、指数関数を直接導くことも出来る。また、解が一つしか存在しないことを、微分方程式の一般論から確認することも出来る。

<sup>31</sup> 任意の二階の定数係数線形斉次微分方程式はこの形で書ける。

<sup>32</sup> このような因数分解が正当化されるのには、微分演算子  $\frac{d}{dx}$  と数  $p, q$  とが可換であること ( $\frac{d}{dx}pf(x) = p\frac{d}{dx}f(x)$ ) が重要である。もし  $p, q$  が数ではなく  $x$  の関数だったとしたら、このような単純な因数分解は行えない。

がこの微分方程式の解と分かる。ただし  $C_1, C_2$  は初期値に依存したパラメータである。(解きたい微分方程式は二階の微分方程式で、この解にはパラメータが二つ出てきているので、これで解はすべて得られている)。

状況が複雑になるのは  $p = q$  の場合である。この場合には、上と同じような考え方をしても  $y_1 = Ce^{-px}$  しか得られず、パラメータは一つしかない。これは二階の微分方程式なので、これとは異なる解がもう一つ存在するはずである。その解は

$$\left[ \frac{d}{dx} + p \right] y_2 \neq 0 \quad (3.18)$$

だが

$$\left[ \frac{d}{dx} + p \right] \left[ \frac{d}{dx} + p \right] y_2 = 0 \quad (3.19)$$

を満たすものでないといけない。つまり  $y_2$  は

$$\left[ \frac{d}{dx} + p \right] y_2 = De^{-px} \quad (3.20)$$

を満たす ( $D$  はパラメータ)。このような  $y_2$  としてどのようなものがあるか考えると、

$$y_2(x) = D \cdot xe^{-px} \quad (3.21)$$

がこの条件を満たすことが分かる<sup>33</sup>。なので、 $p = q$  の場合の解は

$$y(x) = Ce^{-px} + Dxe^{-px} \quad (3.23)$$

だと分かる。

ここまでの構造が分かれば、一般の定数係数線形斉次微分方程式の解も簡単に求まる。微分方程式が式 (3.13) で書かれているように因数分解できたとする<sup>34</sup> と、この微分方程式の解は

$$y(x) = \sum_i f_i(x)e^{\lambda_i x} \quad (3.24)$$

と書ける。ただし  $f_i(x)$  は任意の  $n_i - 1$  次多項式である。

[3-1] 以下の微分方程式を解け。ただし、次の節のオイラーの公式も利用して、答えは実数のみの形で表すようにすること。

$$\frac{d^3}{dx^3} y + y = 0 \quad (3.25)$$

### 3.3 オイラーの公式

ここで、二次方程式の解は一般には複素数なので、複素数の指数関数が出てきてしまう点を疑問に思うかもしれない。例えば、単振動の式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega^2 x = 0 \quad (3.26)$$

<sup>33</sup> ここでは天下りに解を与えてしまったが、この解の形にはある程度理由もある。 $p \neq q$  の場合の一般解は、 $e^{-px}$  と  $(e^{-qx} - e^{-px})/(p - q)$  の線形結合とも書くことができる。ここで、 $q \rightarrow p$  の極限をとれば、二つ目の一般解は

$$\lim_{q \rightarrow p} \frac{e^{-qx} - e^{-px}}{p - q} = xe^{-px} \quad (3.22)$$

となり、これは  $p = q$  の場合の一般解である。着想としては、 $p \rightarrow q$  の場合には解同士が同じものになってしまうが、それらの足し引きをうまく考えることで、元々の一般解が極限で  $\frac{0}{0}$  の形となり、かつこれが非自明な収束先を持つようにすれば、その収束先の関数が求めたい一般解となるだろう、というものである。

<sup>34</sup> 代数学の基本定理により、 $n$  次方程式は複素数の中に重解込みで必ず  $n$  個の解を持つことが証明されている。そのため、その解を用いれば必ず左辺はこの形に変形できる。

と書けるが、これは定数係数線形斉次微分方程式なので、前節の一般論で解くことができる。その左辺は

$$\left[ \frac{d}{dt} + i\omega \right] \left[ \frac{d}{dt} - i\omega \right] x = 0 \quad (3.27)$$

と因数分解できるので、一般解は

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t} \quad (3.28)$$

と求まり、虚数の指数関数が現れる。

この解は、高校で習った単振動の解

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.29)$$

とは見た目が異なるように見える。しかし、実はこれらは、実数  $x$  に対する「オイラーの公式 (Euler's formula)」

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.30)$$

を使うと結びつけることができる。またこの例に限らず、複素数の指数関数はオイラーの公式を用いて計算することができる。

オイラーの公式 (3.30) は、テイラー展開を習った後であれば、指数関数及び三角関数のテイラー展開を比較することで導出することができる。しかし、テイラー展開を使わなくても、以下のような議論から、この関係式が妥当なものであることを確認することができる。

我々は (実数の) 指数関数について色々知っているような気がするが、実は諸々の指数関数の性質は、以下の二つの関係から導くことができる。

- 加法性:  $e^x e^y = e^{x+y}$
- 微分の値:  $\frac{d}{dx} e^{ax} = a e^{ax}$

なので、オイラーの公式によって拡張された複素数の指数関数が、この二つの関係を満たしているかを確認することで、オイラーの公式が妥当なものだとみなすことができる。

まず加法性から確認しよう。これは三角関数の加法定理により

$$e^{ix} e^{iy} = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = e^{i(x+y)} \quad (3.31)$$

と確認できる。また、微分の値は、三角関数の微分を思い出せば

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = \frac{d}{dx} (\cos x + i \sin x) = -\sin x + i \cos x = i e^{ix} \quad (3.32)$$

となり、これもまた満たされる。よって、オイラーの公式は正しく指数関数の複素数への拡張を与えていると考えられる。

では、単振動の二つの解、式 (3.29) と式 (3.28) が一致することを確認しよう。オイラーの公式を使うと、一般論で得られた式 (3.28) は

$$x(t) = (C_+ + C_-) \cos(\omega t) + i(C_+ - C_-) \sin(\omega t) \quad (3.33)$$

と書き直せる。よって

$$A := C_+ + C_- \quad (3.34)$$

$$B = i(C_+ - C_-) \quad (3.35)$$

と置けば、これは高校で習った解 (3.29) になる。

### 3.4 線形非斉次微分方程式

次に、先程の線形斉次微分方程式に加え、 $x$  だけの関数の項  $f(x)$  があるような、線形非斉次微分方程式

$$\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}y + a_0(x)y + f(x) = 0 \quad (3.36)$$

を考えよう。今は定数係数に限らない。実は、(定数係数に限らず) 線形微分方程式の場合には、斉次微分方程式と非斉次微分方程式の間には密接な関係がある<sup>35</sup>。

対応する線形斉次微分方程式が解けている状況を考えよう。例えば、以下の定数係数線形非斉次微分方程式

$$\frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy + f(x) = 0 \quad (3.37)$$

ならば、対応する線形斉次微分方程式は式 (3.10) であり、この解はすでにすべて求めている。記号を見やすくするため、対応する線形斉次微分方程式の左辺を与える演算子を  $\mathcal{F}y := \frac{d^2}{dx^2}y + (p+q)\frac{d}{dx}y + pqy$  と書くことにしよう。対応する線形斉次微分方程式が解けているというのは、 $\mathcal{F}y = 0$  を満たす  $y$  をすべて得られているということである。この解の集合を  $S$  と書くことにする。

さてここで、式 (3.37) を満たす解  $Y(x)$  を一つ見つけることが出来たとしよう。このとき、すべての解は

$$\text{「対応する斉次方程式の一般解 } g(x) \in S \text{」} + \text{「非斉次方程式の一つの特解 } Y(x) \text{」} \quad (3.38)$$

の形で書かれ、またこの形で尽くされている。以下この事実を示そう。

式 (3.38) の形で書かれる関数が、微分方程式 (3.37) の解となることの確認は簡単である。仮定より、 $g(x) \in S$  ならば  $\mathcal{F}g(x) = 0$ 、また  $\mathcal{F}Y(x) + f(x) = 0$  なので、

$$\mathcal{F}(g(x) + Y(x)) + f(x) = \mathcal{F}g(x) + \mathcal{F}Y(x) + f(x) = 0 \quad (3.39)$$

となり、解であることが分かる。ここで、演算子  $\mathcal{F}$  の線形性を用いた。

次に、微分方程式 (3.37) のすべての解が式 (3.38) の形で書かれることを示そう。ある関数  $Z(x)$  が微分方程式 (3.37) の解である、つまり  $\mathcal{F}Z(x) + f(x) = 0$  を満たすとすると、再び演算子  $\mathcal{F}$  の線形性を用いると、 $h(x) := Z(x) - Y(x)$  は

$$\mathcal{F}h(x) = \mathcal{F}(Z(x) - Y(x)) = (\mathcal{F}Z(x) + f(x)) - (\mathcal{F}Y(x) + f(x)) = 0 \quad (3.40)$$

を満たすことが分かる。つまり  $h(x)$  は対応する線形斉次微分方程式の解である ( $h(x) \in S$ )。よって、どのような微分方程式 (3.37) の解  $Z(x)$  も  $Z(x) = h(x) + Y(x)$  という形で書ける。これは示したかったことである。

以上の理由により、対応する斉次線形微分方程式が解けている場合、非斉次線形微分方程式は特解を一つ求める問題に帰着される。対応する斉次方程式が解けている場合には、一般的に特解を求める方法も存在はする<sup>36</sup> が、階数が低く定数係数の場合には、一般論を用いるよりも泥臭く代入して解を探した方が素早く解が見つかることが多い。

例として、

$$\frac{dy}{dx} + ay = e^{mx} \quad (3.41)$$

という線形非斉次微分方程式を解いてみよう。ただし  $m, a$  は定数であり、 $m + a \neq 0$  とする。ともかく左辺から  $e^{mx}$  という形の関数が出てこないといけないので、 $y$  も  $e^{mx}$  のような形の項を含むだろうと予想する。 $y = e^{mx}$  を左辺に代入してみると、

$$\frac{d}{dx}e^{mx} + ae^{mx} = (m+a)e^{mx} \quad (3.42)$$

<sup>35</sup> ウェブで読めるテキストだと、田崎『数学：物理を学び楽しむために』8.2.2 節にも非斉次微分方程式の斉次微分方程式との関係や特解の求め方が出ている。このテキストとはやや異なる特解の求め方も紹介されているので、併せて読んでみていただきたい。

<sup>36</sup> グリーン (Green) 関数の方法やラグランジュ (Lagrange) の定数変化法、定数係数の場合にはミクスンスキー (Mikusinski) の演算子法などが知られている。グリーン関数の方法については 3.8 節で述べる。

となる。右辺は  $e^{mx}$  なので、このままだと  $m+a$  倍だけ大きくなっている。なので全体を  $m+a$  で割って

$$y = \frac{e^{mx}}{m+a} \quad (3.43)$$

とすれば、これが特解になっていることは簡単に確認できる。大雑把な特解の探し方として、非斉次項が

$$\begin{aligned} e^x &\rightarrow e^x \\ \sin x, \cos x &\rightarrow A \sin x + B \cos x \\ x^n + ax^{n-1} + \dots &\rightarrow n \text{ 次以下の多項式} \end{aligned} \quad (3.44)$$

という感じで探すとよい。なお、これで解が見つからない場合は、 $e^x$  や  $\sin x$  の場合、これらに多項式をかけたもの ( $xe^x$  など) を探してみるとよい。これは、式 (3.10) の  $p=q$  の場合にも見たようなテクニックである。

[3-2] 以下の非斉次線形微分方程式 ( $a \neq 0$ ) の解をすべて求めよ。

$$(1) y' + ay = x^2 \quad (3.45)$$

$$(2) y' + ay = e^{-ax} \quad (3.46)$$

定数係数とは限らない一般の線形非斉次微分方程式に対して、この節で見た議論は成り立つ。なので、一般の線形非斉次微分方程式においても「対応する線形斉次方程式の一般解」+「一つの特解」で一般解は書ける。問題は、定数係数ではない場合には「対応する線形斉次方程式の一般解」が必ずしも求まらない点である。しかし逆に言えば、うまく「対応する線形斉次方程式の一般解」を求めさえすれば、あとは一つ特解を求めるだけで、定数係数でなくとも一般解はすべて求まる。

### 3.5 一階非線形微分方程式に対する変数分離法

ここまで、線形微分方程式を対象に、さまざまな解き方を見てきた。ここでは対象を変え、あるタイプの1階の非線形微分方程式に関して有効な方法である変数分離の方法を見よう。変数分離の方法を用いれば、いくつかの非線形微分方程式は解くことができる。

変数分離の方法が使えるのは、1階の微分方程式で、微分項以外が、微分する変数  $x$  の関数と微分される関数  $y$  の関数の積になっている場合である。つまり、以下の形で記述可能な場合である。

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y). \quad (3.47)$$

これは以下のように解くことができる。まず全体を  $g(y)$  で割り、両辺を  $x$  で積分する。すると

$$\int \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx \quad (3.48)$$

が得られる。ここで、左辺の積分の変数を  $x$  から  $y$  に変換すると、

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx. \quad (3.49)$$

となる<sup>37</sup>。後はこの積分を実行すれば、求めたい微分方程式の解が得られる。

特別な場合として、 $g(y) = -y$  の状況を考えて、これは定数係数ではない1階の線形斉次微分方程式

$$\frac{d}{dx}y + f(x)y = 0 \quad (3.50)$$

<sup>37</sup>しばしばラフな説明で「式 (3.47) 全体に  $dx$  を掛けて分母を払った」というような言い方をすることもある。上記のラフな説明の背景にある計算は、ここで述べたようなものであり、これは数学的に正しい変形である。

そのものである。これまで見てきた線形非斉次微分方程式の一般解の性質や特殊解を求める方法は、定数係数でない場合にも適用できるので、これで1階の線形微分方程式の解き方は（斉次・非斉次、定数係数か否かを問わず）すべて見たことになる。

[3-3] 下の微分方程式の一般解を求めよ。ただし、 $y'$  は実変数  $x$  についての微分である。

$$y' + xy + x^3 = 0 \quad (3.51)$$

### 3.6 初期値問題

力学などの物理の問題においては、初期状態が与えられており、そこからどのように状態が時間発展するか求めたいことが多い。これは微分方程式の言葉では、 $x = 0$  における初期値  $y(0), y'(0), \dots$  が与えられている状況に対応する。具体的な時間発展を得るには、微分方程式の一般解をまず解いたうえで、初期値を満たすようなパラメータを探せばよい。

一般に、 $n$  次の微分方程式には自由なパラメータが  $n$  個ある。これを定めるため、初期値も  $n$  個与えられる必要がある。例えば1次元の質点の運動であれば、微分方程式は2次方程式であり、自由なパラメータは2個存在するはずである。この2個のパラメータを定めるためには、初期時刻における位置と速度（微分の値）が与えられればよい。（特殊な場合を除けば、初期値ではなく「2つの異なる時刻における位置」などを与えても、運動は定まる）

[3-4] 以下の方程式の、 $y(0) = 1, y'(0) = 3$  の解を求めよ。

$$y'' + 4y' + 4y + x^2 - 4x = 0 \quad (3.52)$$

### 3.7 摂動

ここまで、微分方程式が厳密に解ける場合を考えてきた。しかし物理で直面する微分方程式は、多くの場合には厳密に解くことは出来ない。そこで、ここでは微分方程式を近似的に解く方法の一つである「摂動 (perturbation)」について、簡単に説明する。

例えば、以下の微分方程式を考えてみよう。ただし  $\varepsilon$  は  $|\varepsilon| \ll 1$  を満たす（絶対値が）小さな定数とする。

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y + \varepsilon y \frac{dy}{dx} = 0 \quad (3.53)$$

この方程式は非線形項を含んでおり、今まで習った方法では解くことが出来ない。

しかし、もし  $\varepsilon = 0$  であれば、これは定数係数線形斉次微分方程式であり、

$$y = A \sin(ax) + B \cos(ax) \quad (3.54)$$

と解くことができる。そして今  $\varepsilon$  は小さいので、解  $y(x)$  を  $\varepsilon$  についてべき展開して

$$y(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots \quad (3.55)$$

のように書けば、 $x = O(1)$  の範囲では<sup>38</sup> その低次項は実際の解のよい近似になっていると考えることができる。

式 (3.55) を式 (3.53) に代入すると

$$f_0''(x) + \varepsilon f_1''(x) + \varepsilon^2 f_2''(x) + \dots + a^2(f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \varepsilon^2 f_2(x) + \dots) + \varepsilon(f_0(x) + \varepsilon f_1(x) + \dots)(f_0'(x) + \varepsilon f_1'(x) + \dots) = 0 \quad (3.56)$$

<sup>38</sup> $x$  が  $1/\varepsilon$  のように大きくなる領域では、ここでの議論は必ずしも成り立たない。そうした状況を扱うには、「特異摂動 (singular perturbation)」という技法を用いる必要がある。特異摂動の例は次の章で少し見る。

という関係式が得られる。 $\varepsilon = 0$  の場合の解は、 $\varepsilon$  のゼロ次の項の係数比較で得られる解に対応しており、これは  $f_0(x) = A \sin(ax) + B \cos(ax)$  を与える。 $f_1(x)$  を求めるには、 $\varepsilon$  の一次の項を係数比較すればよい。これは

$$f_1''(x) + a^2 f_1(x) + f_0(x) f_0'(x) = 0 \quad (3.57)$$

という方程式である。 $f_0(x)$  はすでに求めているので、これを代入すれば、

$$f_1''(x) + a^2 f_1(x) + a \frac{A^2 - B^2}{2} \sin(2ax) + aAB \cos(2ax) = 0 \quad (3.58)$$

である。これは非斉次の定数係数線形微分方程式なので解くことができ、

$$f_1(x) = C \sin(ax) + D \cos(ax) + \frac{A^2 - B^2}{6a} \sin(2ax) + \frac{AB}{3a} \cos(2ax) \quad (3.59)$$

が  $\varepsilon$  の 1 次解とわかる。

[3-5] 以下の微分方程式 ( $a \neq 0$ ) を、 $\varepsilon$  が小さいとして  $\varepsilon$  の一次まで解け。

$$y' + ay + \varepsilon \ln y = 0 \quad (3.60)$$

### 3.8 <補論>：線形非斉次方程式に対するグリーン関数の方法

ここでは線形非斉次微分方程式で特解を見つけるための一般的方法である、グリーン関数の方法を見よう。具体例を用いた方が説明しやすいので、一般の外力を受けた減衰項付き単振動

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t) \quad (3.61)$$

を解くことを考える。一般の線形非斉次微分方程式の場合への拡張は容易である。

これを解くための準備として、時刻  $\tau$  より前では粒子は  $x = 0$  に静止 ( $t < \tau$  で  $x = 0$ 、 $\frac{dx}{dt} = 0$ ) しており、時刻  $t = \tau$  で強さ 1 の撃力を受けた状況での時間発展

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \delta(t - \tau) \quad (3.62)$$

の解を考えることにしよう。ただし  $\delta(x)$  はディラック (Dirac) のデルタ関数で、任意の関数  $g(x)$  と  $\varepsilon > 0$  に対し

$$\delta(x) = 0 \quad (x \neq 0) \quad (3.63)$$

$$\int_{-\varepsilon}^{0+\varepsilon} dx g(x) \delta(x) = g(0) \quad (3.64)$$

を満たす関数である (図 8)。イメージ的には、一点  $x = 0$  で無限大の値を、他の場所ではすべて 0 をとっていて、積分すると 1 になるような関数である<sup>39</sup>。

グリーン関数は、式 (3.62) の解  $x = G(t; \tau)$  として定義される。すると  $t = \tau$  周りの微小時間  $\tau - \varepsilon \leq t \leq \tau + \varepsilon$  での積分を考えることにより、 $G(t; \tau)$  は境界条件

$$x(\tau) = 0, \quad \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau} = 1 \quad (3.65)$$

の下での、対応する斉次微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \quad (3.66)$$

<sup>39</sup> これは通常の意味での関数ではないが、超関数 (generalized function) 論の枠組では正当に取り扱うことができる。ここでは細かい点は気にせずに通常関数のようにとらえて議論を進める。



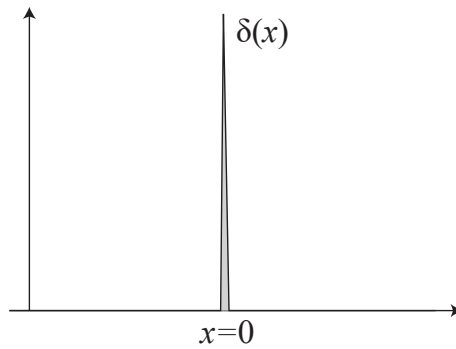


図 8: デルタ関数  $y = \delta(x)$  のイメージ図。点  $x = 0$  に、無限に細く無限に高いピークが立っている。グレーの領域の面積は 1 になるように、細さと高さの関係を保ちながら、幅をゼロ、高さを無限大に飛ばしている。

の解であることが分かる。斉次微分方程式はすでに解けているので、これを代入することで、グリーン関数  $G(t; \tau)$  は

$$G(t; \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(t - \tau)} - \frac{1}{2\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})(t - \tau)} \quad (3.67)$$

と厳密に求まる。

これを用いると、特解は簡単に求められる。非斉次項は

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t' - t) \quad (3.68)$$

と書けるので、これを「各時刻ごとに、重み  $f(t)$  のデルタ関数が作用し、それが積み上がっている」と解釈することで、式 (3.61) の特解は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') G(t'; t) \quad (3.69)$$

と形式的に求まる（グリーン関数は先程得られた式 (3.67) を代入する）。

### 3.9 <補論>：微分方程式の解の存在と一意性

これまで取り扱ってきた微分方程式においては、解の存在と一意性はある種自明視してきた。実際、微分方程式が物理現象を記述しているのであれば、当然時間発展が存在しかつそれは一意的である必要がある以上、解の存在と一意性は物理的には当然の性質に思える。しかし、数学的な微分方程式論の観点から見れば、解の存在と一意性は全く明らかではない<sup>40</sup>。

幸い、常微分方程式の場合、解の存在と一意性はかなり広いクラスの問題に対し証明することが出来る。以下の形の一階の常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + F(x, y) = 0 \quad (3.70)$$

を考える<sup>41</sup>。すると、関数  $F(x, y)$  が点  $(x_0, y_0)$  の近傍領域で連続であり、かつこの領域内の任意の（固定した） $x$  に対し、 $y$  の関数  $F(x, y)$  が  $y$  について一様にリプシッツ連続であるとする、この微分方程式は初期条件  $(x_0, y_0)$  近傍に解を持ち、それは一意的であることが証明できる（ピカルル・リンデレフ (Picard-Lindelöf) の定理)<sup>42</sup>。ただし関数  $f(t)$  が「リプシッツ連続 (Lipschitz continuity)」とは、ある正定数  $K$  が存在し、

<sup>40</sup>例えば、流体を記述するナビエ・ストークス (Navier-Stokes) 方程式の解の存在と滑らかさを証明する（もしくは反証する）ことは、7つのミレニアム懸賞問題の一つにも選ばれている。

<sup>41</sup>二回以上の微分方程式の場合は、 $y, y', y'' \dots$  をそれぞれ独立の未知関数  $y_0, y_1, y_2 \dots$  とみなしたうえで、 $dy_0/dx = y_1$ ,  $dy_1/dx = y_2$  などの式を追加することにより、一階の連立常微分方程式に帰着できる。

<sup>42</sup>【コラム：より一般の微分方程式の解の存在と一意性】：常微分方程式の場合、 $F(x, y)$  のリプシッツ連続の条件を外して連続の条件だけにすると、解の存在は証明できる（ペアノの存在定理 (Peano existence theorem)、1890）が一意的性は保証できなくなる。偏微分方程式の場合には、同じように方程式を書いたときに  $F$  が解析的であれば解の存在と一意性を証明できる（コーシー・コワレフスカヤ (Cauchy-Kovalevskaya) の定理。コーシーは 1842 年に部分的な証明を与え、完全な証明はコワレフスカヤによって 1875 年に与えられた。)。その一方で、 $F$  が無限回連続的の微分可能であっても局所的にさえ解が存在しなくなるような方程式も存在する。

任意の  $t, t'$  について

$$|f(t) - f(t')| \leq K |t - t'| \quad (3.71)$$

が成り立つことである。「 $y$  について一様にリプシッツ連続」というのは、正定数  $K$  が  $x$  によらない値であることを意味している<sup>43</sup>。リプシッツ連続の直感的な意味は「傾きが一定以上に大きくならないこと」である。微分方程式の解の一意性のための上記条件を「リプシッツ条件」という。リプシッツ条件が満たされないと、微分方程式の解が複数現れたり、解が消滅したりするようなことが起こりうる。

通常の力学の系（例えば万有引力に従う質点系）において、有限時間の間に方程式の解が存在しなくなるケースとして最も起こりやすいのは衝突の状況である。例えば万有引力に従う二質点系で、二つの質点が万有引力に引かれてどんどん互いに接近していく状況では、有限の時間で二つの質点は衝突し、それ以降の時間発展は記述できなくなる。衝突以外の特異性は、ほとんどのまともな問題では無視してかまわない<sup>44</sup>。なので物理では普通は微分方程式の解の存在と一意性は気にしないが、変数の取り方が不適切だと、運動そのものが正常な力学の系においても、微分方程式におかしなことが起きることはしばしばある。その例の一つを見てみよう。

重力環境下で、手で持っていた質量  $m$  のボールを放し、落下させることを考える。ただし空気抵抗はないものとする。ボールの垂直方向の位置  $x$  の従う方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \quad (3.72)$$

と書ける。初期条件は、 $x = x_0$ 、 $dx/dt = 0$  である。この方程式には何の異常性もなく、これまで見てきた方法で解くことができる。

さて、エネルギー保存則より

$$E = mgx + \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = mgx_0 \quad (3.73)$$

である。今、速度はゼロ以下（下向きへの運動）なので、これを变形して得られる

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{2g(x_0 - x)} \quad (3.74)$$

も同じ運動を記述していると思える。

しかし、式 (3.74) 右辺は  $x = x_0$  でリプシッツ条件を満たさない。そしてそれを反映し、式 (3.74) の解には、式 (3.72) の解以外の非物理的な解（微分方程式 (3.74) が任意の  $t$  で満たされているような関数  $x(t)$ ）が存在する。その一例は、

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + x_0 & t_0 < t \end{cases} \quad (3.75)$$

である。これは「手を離れた後、時刻  $t_0$  までは位置  $x_0$  にボールが浮いていて (!)、 $t_0$  を過ぎると通常の落下を始める」という解である。 $t_0$  は任意の正の実数をとれるので、式 (3.74) の解には、式 (3.72) の解以外の無数の解が存在することが分かる。

変数を適切にとっているにもかかわらず、現実の物理系の微分方程式において特異性や異常性が現れたとすると、それはほとんどの場合、その微分方程式（モデル）で記述可能な領域を系の状態が超えてしまったことを意味している。例えば完全流体の方程式の有限振幅進行波の解は、無限大の勾配が出現してしまうことがよく知られている。これは、「粘性が無視できる」という完全流体の仮定が、そのような激しい勾配の条件下では破綻してしまい、もはや現象は完全流体の方程式でよく記述されなくなるためである。例えば次の章で「発散していく振幅を持つ振動解」が得られる設定を扱うが、これももちろん実際には振幅が無限に大きくなるのではなく、対象とする物理系が「もはや大元の微分方程式でよく記述できる領域を超えてし

レヴィーの例題 (Lewy's example) がその反例としてよく知られている (レヴィー, 1957)。(詳細は竹井義次「解けない微分方程式をめぐって」(<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/kokai-koza/takei.pdf>) 参照)

<sup>43</sup>連続的の微分可能な関数はリプシッツ連続な関数であり、リプシッツ連続な関数ならば連続な関数である。一方、微分可能でもリプシッツ連続とは限らず (例:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ )、リプシッツ連続でも微分可能とは限らない (例:  $f(x) = |x|$ )。

<sup>44</sup>【コラム: 万有引力質点系における特異点】: 万有引力に従う質点系の場合、3 体であれば衝突以外の特異点が存在しないことが証明されている (パルヴェ (Painlevé, 1895)。同時にパルヴェは 4 体以上であれば衝突以外の特異点 (有限の時間内に質点が無限の速さに飛び去ってしまう解) が生じると予想 (パルヴェ予想) し、5 体の場合についてはシャー (Xia) が具体例を 1988 年に構成した。ただし、4 体の場合に特異点に至る初期状態の測度はゼロであることは証明されている (サアリ (Saari, 1977))。(詳細は F・ディアク、P・ホームズ『天体力学のパイオニアたち (上)』(シュプリンガーフェアラーク東京) 第三章を参照)

まう」という形で、振幅は（ここには書かれていない何らかの要因によって）押さえられる。このように、微分方程式やモデルは「一定の範囲内の系の挙動をよく記述するために導入されたもの」であり適用範囲・適用限界があるということは、物理学の観点からは極めて重要である。

## 4 1次元空間中の運動

では前章で学んだことを、具体的な物理的設定に応用しよう。本章では、1次元空間中の物体の運動を考える。なお、物体は全て質点で近似できるものとする。

### 4.1 抵抗中の落下運動

まず、粘性抵抗中の落下運動を考えよう。一様加速度  $g$  の下で落下する質点が、速度と反対方向に速度に比例する粘性抵抗<sup>45</sup> (viscous drag: 摩擦抗力とも) を受ける場合を考える。つまり、運動方程式が

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - \gamma \frac{dx}{dt} \quad (4.1)$$

あるいは速度の式として書くと

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (4.2)$$

で記述される状況を考える。ただし  $x$  は鉛直方向の位置で、下向きを正にとっている。位置は速度を積分すれば求められるので、以下では、初速度がゼロの場合の速度  $v(t) := \frac{dx}{dt}$  の一般解を求めよう。

式 (4.2) は、線形非斉次微分方程式そのものの形をしているので、すぐに解くことができる。対応する斉次方程式は

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{m} v = 0 \quad (4.3)$$

なので、この一般解は

$$v(t) = C \cdot e^{-\gamma t/m} \quad (4.4)$$

と解ける。ただし  $C$  は初期条件に応じて定まる定数である。非斉次項を付け加えた場合の特解の一つは

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma} \quad (4.5)$$

と簡単に求まる。よって式 (4.2) の一般解は

$$v(t) = C \cdot e^{-\gamma t/m} + \frac{mg}{\gamma} \quad (4.6)$$

である。今は  $t = 0$  において  $v(t) = 0$  という初期条件が与えられているので、これを代入して  $C$  を求められる。その結果、この初期条件の下での速度の解は

$$v(t) = -\frac{mg}{\gamma} \cdot e^{-\gamma t/m} + \frac{mg}{\gamma} \quad (4.7)$$

と求まる。十分時間が経った後の速度 (終端速度) は  $\frac{mg}{\gamma}$  であり、終端速度に落ち着くまでの典型的な時間の長さは  $\frac{m}{\gamma}$  で特徴づけられる。

さて、実は終端速度とそこに至るまでの典型的タイムスケールは、定数係数を無視するのならば、実は方程式を解かずとも次元解析だけで求まる。式 (4.2) に含まれる3つのパラメータの次元は、質量  $m$  は M、粘性抵抗  $\gamma$  は M/T、重力加速度  $g$  は L/T<sup>2</sup> である。ただし M は質量、T は時間、L は長さの次元を表す。これらを組み合わせて速度 L/T の次元を作るには  $\frac{mg}{\gamma}$  の組み合わせしか、時間 T の次元を作るには  $\frac{m}{\gamma}$  の組み合わせしか存在しない。よって終端速度とそこに落ち着く典型的な時間の長さは、それぞれ  $\frac{mg}{\gamma}$  と  $\frac{m}{\gamma}$  (の定数倍) であると分かる。

では次に、粘性抵抗ではなく、速度の2乗に比例する慣性抵抗 (form drag: 形状抗力、圧力抗力とも) が働く場合を考えよう。つまり、運動方程式が

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa v^2 \quad (4.8)$$

<sup>45</sup> この「速度に比例する抵抗」という設定は物理ではよく用いられるが、実は日常スケールの物理としてはやや人工的な設定である。机の上で物を滑らせた際の摩擦力は速度にはほぼ依存せず、液体・気体中の運動における抵抗は、余程粘性が強くて運動が遅くない限り、直後に見るような速度の二乗に比例する慣性抵抗が効いてくる。しかしここでは、そのような点には目をつぶり、速度に比例する抵抗の場合を考察することにする。

で記述される状況を考える<sup>46</sup>。

今度の変数分離型として解くことができる。式 (4.8) は

$$\int \frac{dv}{g - \frac{\kappa}{m}v^2} = \int dt \quad (4.9)$$

と変形できる。部分分数分解して左辺の積分を実行することで

$$\frac{m}{\kappa} \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{a-v} + \frac{1}{a+v} \right) dv = \frac{m}{2\kappa a} \ln \left| \frac{a+v}{a-v} \right| + C = t \quad (4.10)$$

と解ける。ただしここで  $a := \sqrt{mg/\kappa}$  と置いた。全体を指数の方に乗せると

$$e^C \left| \frac{a+v}{a-v} \right| = e^{2\kappa at/m} \quad (4.11)$$

となる。 $e^C$  が正の範囲しか取れないので、 $D = e^{-C}$  と<sup>47</sup> 定数の範囲を実数全体に広げると同時に  $\frac{a+v}{a-v}$  の絶対値を外す<sup>48</sup>。あとはこれを  $v$  について解き、初速度ゼロの条件を入れると

$$v(t) = -\frac{2a}{De^{2\kappa at/m} + 1} + a = -\sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \frac{2}{e^{2\sqrt{\kappa g/m}t} + 1} + \sqrt{\frac{mg}{\kappa}} \quad (4.12)$$

と解が求まる。終端速度は  $\sqrt{mg/\kappa}$ 、終端速度に落ち着くまでの典型的タイムスケールは  $\sqrt{m/\kappa g}$  である。これらは再び、方程式を解くことなく次元解析からも求められる量である<sup>49</sup>。

スカイダイビングだと、腹ばいの形だと平均的な人間の終端速度は 200km/h  $\simeq$  56m/s ほどだという<sup>50</sup>。重力加速度は 9.8m/s<sup>2</sup> なので、終端速度に達するまでにかかる時間の典型的な長さは 56/9.8  $\simeq$  5.6s と見積もれる。大雑把に推定して数秒で終端速度に達するということであり、これは実際のスカイダイビングでの経験値 (数秒～10 秒で終端速度) と一致している。

[4-1] 粘性抵抗のみの場合 (4.2) と、慣性抵抗のみの場合 (4.8) とで、終端速度が同じだったとする。このとき、両者の場合にも初速度ゼロで物体を落下させはじめた場合、同一時刻においてはどちらの場合の方が速度は大きい。「常に～の場合の方が大きい」「最初は～の場合の方が大きい、途中から～の場合の方が大きくなる」「これだけの条件では決められない」のような形で答えよ。

(ヒント：導出した二つの解の式を見比べても、意外と分かりにくいと思う。出発点の方程式の形と、どうすることが起きるのかをうまくイメージすることを考えた方が解きやすい。)

## 4.2 減衰振動

次に、線形バネのポテンシャル中の運動 (単振動) を考えよう。任意のポテンシャルにおいて、安定点近傍のポテンシャルは二次ポテンシャルで近似できる。これは、ポテンシャル  $U(x)$  の下で  $x = x_0$  が安定だとすると、 $x = x_0$  周りでのテイラー展開は

$$U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) + \frac{dU}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3U}{dx^3} \Delta x^3 + \dots \quad (4.13)$$

であるが、一次の係数  $\frac{dU}{dx}$  は「安定点である」という仮定によりゼロで、 $O(\Delta x^3)$  は高次項として無視すると

$$U(x_0 + \Delta x) \simeq U(x_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2U}{dx^2} \Delta x^2 \quad (4.14)$$

<sup>46</sup> 粘性抵抗と慣性抵抗が両方働く場合も、慣性抵抗の場合を解く際のテクニックを用いて解くことができる。

<sup>47</sup>  $D = e^C$  としなかったのは単に最後の解の見栄えをよくするためである。

<sup>48</sup> こうすることで、 $D$  が負の場合と  $\frac{a+v}{a-v}$  が負の場合とが対応することになる。

<sup>49</sup> 慣性抵抗係数  $\kappa$  の次元は M/L である

<sup>50</sup> 頭を下にして落下すると、空気抵抗は小さくなるので終端速度は大きくなり、300km/h 程度の終端速度まで実現できる。なお、空気が薄くなればその分だけ空気抵抗は小さくなるので、終端速度も大きくなる。落下速度のギネス記録は、高度 40km の成層圏からのダイブによる 1322km/h である。

と位置の二次で近似できるからである。線形バネのポテンシャルの運動（単振動）の解析が出来れば、一般の安定点回りの微小振動の問題に答えることになるため、バネそのものを物理学で扱う機会は多くなくとも、線形バネの系をきちんと調べることは極めて重要である。

テイラー展開をまだ学んでいない人は、これは力についての一次近似だと理解しても構わない。位置  $x$  においてポテンシャルが作る力は  $F(x) = -\frac{\partial U(x)}{\partial x}$  である。 $x = x_0$  は安定（力がかかっていない）なので、 $F(x_0) = 0$  である。この一次近似は

$$F(x_0 + \Delta x) \simeq F'(x_0)\Delta x = -\left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \Delta x \quad (4.15)$$

という近似であり、この力の形は単振動の式の力の式と同じ形である。ポテンシャルの形で表したいならば、力を位置  $x$  で積分すればよく

$$U(x_0 + \Delta x) = U(x_0) - \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dy F(y) \simeq U(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} dy \left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} y = \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} \Delta x^2 \quad (4.16)$$

が得られる。

では下図のように、質量  $m$  の粒子が壁にバネ定数  $k > 0$  のバネで繋がれている状況を考えよう。粒子は壁と垂直な方向にのみ動くことができる。



図 9: 粒子質量は  $m$ 、バネ定数は  $k$  とする。

まず粒子には何も抵抗が働かない状況を考えよう。この場合の粒子の運動方程式は

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx \quad (4.17)$$

と書ける。ここで、 $x$  は平衡位置からのずれである。角振動数  $\omega = \sqrt{k/m}$  を導入し、運動方程式を

$$\frac{d^2}{dt^2} x + \omega^2 x = 0 \quad (4.18)$$

と書き換えておくと便利である。この微分方程式は、3.3 章で見たように、

$$x(t) = C_+ e^{i\omega t} + C_- e^{-i\omega t} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4.19)$$

と求まる。

では次に、単振動の系にさらに速度に比例する粘性抵抗が働く状況を考えよう。この場合、運動方程式はその抵抗に関係した正の定数  $\mu$  を用いて、

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx - \mu \frac{d}{dt} x \quad (4.20)$$

と書ける。ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{\mu}{2m} \quad (4.21)$$

と置くことにより、運動方程式は

$$\frac{d^2}{dt^2} x + 2\gamma \frac{d}{dt} x + \omega^2 x = 0 \quad (4.22)$$

と書ける。

これは2階の定数係数線形微分方程式なので一般論で解くことができるが、解の定性的振る舞いは $\omega$ と $\gamma$ の大小関係によって異なる。対応する二次方程式は

$$s^2 + 2\gamma s + \omega^2 = 0 \quad (4.23)$$

なので、解の公式に代入して $s$ を求め、それを用いて式(4.22)左辺を因数分解すると

$$\left[ \frac{d}{dt} + \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right] \left[ \frac{d}{dt} + \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \right] x(t) = 0 \quad (4.24)$$

となり、 $\gamma \neq \omega$ の場合の一般解は

$$x(t) = C_+ e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} \quad (4.25)$$

と解ける。

この解は $\omega$ と $\gamma$ の大小関係によって、ルートの部分が実数になるか純虚数になるかが変わる。まず $\omega > \gamma$ (抵抗が小さい場合)の運動を考察しよう。このときはルートの中身が負なので、ルートの部分は純虚数になる。よって解(4.25)は

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[ A \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) + B \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}t) \right] \quad (4.26)$$

と書ける。粒子は、全体としては振動しつつ、その振幅が $e^{-\gamma t}$ の速さで減っていくように振る舞う(図10左)。これを「減衰振動(damped oscillation)」という。

次に $\gamma > \omega$ (抵抗が大きい場合)の運動を考察しよう。このときはルートの中身は正なので、ルートの部分も正の実数で、式(4.25)は二つの指数減衰の足し合わせになる。もっとも遅い減衰速度が長時間における系全体の減衰速度を決めるので、式(4.25)は $t$ が大きい領域では

$$x(t) \simeq C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} \quad (4.27)$$

程度の速さで減衰する。このように、振動せずに減衰が生じる状況を「過減衰(overdamping)」という(図10右)。

最後に、 $\gamma = \omega$ (抵抗と振動が釣り合っている場合)の運動を考察しよう。これは微分方程式の観点でいうと重解が生じている状況である。そのため、解は式(4.25)ではなく、

$$x(t) = (At + B)e^{-\gamma t} \quad (4.28)$$

という形になる。振動減衰と過減衰の境界に当たるこの状況を「臨界減衰(critical damping)」というが、定性的な振る舞いはほぼ過減衰と同一である。 $\gamma$ (すなわち粘性抵抗 $\mu$ )を変化させる状況を考えると、振動しないパラメータ領域の中で最も素早く減衰するのが臨界減衰の状況である。

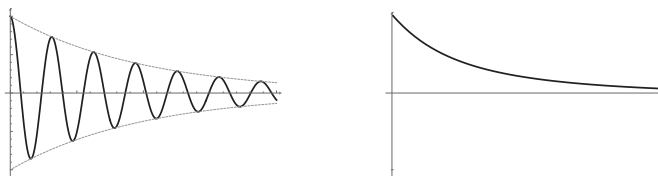


図 10: 左：減衰振動の例。右：過減衰の例

今回は次元解析をしても、時間の逆数の次元を持つ量として $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と $\gamma = \frac{\mu}{2m}$ の二つがあるので、方程式を解かずに系の挙動を知ることができない。しかし逆にここからは、 $\omega$ と $\gamma$ の大小関係が系の定性的挙動にとっては重要であろうことを推察することができる。特に両極端のケースである $\omega \ll \gamma$ と $\omega \gg \gamma$ を考えると、前者 $\omega \simeq 0$ では系はほぼ指数減衰、後者 $\gamma \simeq 0$ では系はほぼ三角関数に従う単振動であることがすぐに分かるので、この両方の効果が混ざり合うことが方程式を解く前の時点で予想できる。



#### [4-2] 粘性抵抗を受けた1次元の単振動

$$m \frac{d^2}{dt^2} x = -kx - \mu \frac{d}{dt} x \quad (4.29)$$

を考える。粘性抵抗が十分小さい状況で、初期条件とその他のパラメータは同一のまま、質量  $m$  を小さくした。このとき、減衰の速さ及び振動の速さはどう変わるか。また、元の条件での  $x-t$  のグラフの概形と、質量を小さくした状況での  $x-t$  のグラフの概形を重ねて描け。

### 4.3 強制振動と共鳴

では次に、外部から振動を加えた場合を考えることにしよう。まず、摩擦・抵抗のない単振動に、外部から周期駆動を加えた

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = f \sin \Omega t \quad (4.30)$$

の状況を考えよう。ここで  $\omega$  と  $f$  は正の定数とする。このように、外部から振動を加えられている状況を「強制振動 (forced oscillation)」と呼ぶ。

これは定数係数線形非斉次微分方程式なので、特解を一つ見つければよい。まず  $\Omega \neq \omega$  の場合を考えよう。この場合、 $x = C \sin \Omega t$  と決め打ちして代入すると

$$-C\Omega^2 \sin \Omega t + C\omega^2 \sin \Omega t = f \sin \Omega t \quad (4.31)$$

が得られるので、 $C = f/(\omega^2 - \Omega^2)$  と分かり、解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \frac{f}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t \quad (4.32)$$

と二つの振動の足し合わせとなることが分かる ( $A$  は任意係数)。

一方、 $\omega = \Omega$  の場合には「共鳴 (resonance)」が生じ、この場合には上記の解は成り立たない。実際、同様に  $x = C \sin \omega t$  と決め打ちして代入すると

$$-C\omega^2 \sin \omega t + C\omega^2 \sin \omega t = 0 \neq f \sin \omega t \quad (4.33)$$

となり、どのような  $C$  でもこれは解とはならない。これは [3-2] (2) と同様の状況なので、そこで用いたのと同様に多項式をかけた形を解の形として決め打ちする。解の形として  $x = Ct \cos \omega t$  と決め打ちする<sup>51</sup> と

$$-2C\omega \sin \omega t = f \sin \omega t \quad (4.34)$$

となり、 $C = -\frac{f}{2\omega}$  と分かるので、解は

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) - \frac{f}{2\omega} t \cos \omega t \quad (4.35)$$

となる。十分時間が経つと、 $x(t)$  は振動しながら  $x = \pm \frac{f}{2\omega} t$  のように振幅を発散させていく。グラフに書くと同図 11 のようになり、周波数  $\omega$  の振動が発散していくことが見て取れる。

このような共鳴現象を利用したものとして、共振回路による電波受信 (ラジオ電波の受信などに用いられる) がある。並列の共振回路の場合には、特定の周波数で共鳴が生じるので、これを受信器として使うことで特定周波数の信号を取り出せる。他にも、高層ビルの共鳴周波数と地震の周波数が揃ってしまったために、弱い地震であるにもかかわらず高層ビルが大きく揺れてしまったり<sup>52</sup>、ワイングラスの共鳴周波数に揃った音を出すことで、音だけでワイングラスを割ることが出来たり<sup>53</sup> と、共鳴現象は色々なところで現

<sup>51</sup> 左辺の二階微分のうち、 $t$  に一回、三角関数に一回微分が作用したものが残るはずなので、最終的に  $\sin$  が出てくるようにここでは  $\cos$  を選んでいる。

<sup>52</sup> 「地震と建物の共振 (高層建物・低層建物) 振動模型」 <https://www.youtube.com/watch?v=nxX4KvTa6w&t=26s> で模型による実験動画が見れる。

<sup>53</sup> 「Breaking Glass with Sound」 <https://www.youtube.com/watch?v=CdUoFIZSuX0> で実験動画が見れる。

れる。

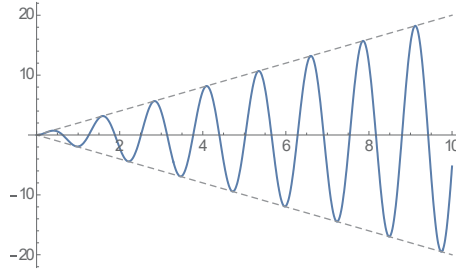


図 11: 共鳴した場合の解 (4.35) の挙動。

では次に、摩擦のある単振動に外部から振動を加える状況を考えよう。運動方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2x = f \sin \Omega t \quad (4.36)$$

で与えられるとする。ここで  $\gamma$ 、 $\omega$ 、 $f$ 、 $\Omega$  はすべて正の定数とする。

対応する斉次方程式の解は式 (4.25) と既に求まっているので、非斉次方程式の特解を一つ求めればよい。 $x(t) = A \sin \Omega t + B \cos \Omega t$  と決め打ちして代入すると、 $\sin$  と  $\cos$  のそれぞれの係数が両辺で等しいため

$$-A\Omega^2 - 2\gamma B\Omega + A\omega^2 = f \quad (4.37)$$

$$-B\Omega^2 + 2\gamma A\Omega + B\omega^2 = 0 \quad (4.38)$$

が満たされる必要がある。これを解いて

$$A = -\frac{(\Omega^2 - \omega^2)f}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \cos \theta \quad (4.39)$$

$$B = -\frac{2\gamma\Omega f}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin \theta \quad (4.40)$$

と書ける。ただしここで  $B < 0$  より  $\sin \theta < 0$  の必要があるので、 $-\pi < \theta < 0$  である。 $\theta$  は

$$\tan \theta = \frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} \quad (4.41)$$

を満たす  $-\pi < \theta < 0$  の範囲の解として定まる。これらを用いると式 (4.36) の解は

$$x(t) = C_+ e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + C_- e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2})t} + \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \theta) \quad (4.42)$$

であると分かる。特に一項目と二項目は  $t$  が大きいところで速やかにゼロに収束するので、十分時間が経った後の系の時間発展は

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}} \sin(\Omega t + \theta) \quad (4.43)$$

で記述される。つまり、系は最後には必ず外部からの振動と同じ振動数で振動する。ただしここで  $\theta$  は常に負なので、系の振動は常に外部の振動に対して遅れていく状況であると分かる。

摩擦がない単振動の場合は、 $\Omega = \omega$  の共鳴条件下では振幅の発散が生じた。これに対し摩擦がある場合には、 $\Omega = \omega$  の共鳴条件が満たされていても振幅は発散せず、振幅は有限値  $f/2\gamma\omega$  である。

振動の遅れの度合い  $\theta$  は、式 (4.41) を見ることで定性的な振る舞いが理解できる。外力の振動数  $\Omega$  が固有振動数  $\omega$  に比べて非常に小さい場合、 $\tan \theta$  は負の側からゼロに近づくので、 $\theta$  はほとんどゼロである。つまり、外力の振動が非常にゆっくりの場合には、遅れはほとんど生じず、系は外部の振動とほぼ同位相で振動する。反対に、外力の振動数  $\Omega$  が固有振動数  $\omega$  に比べて非常に大きい場合、 $\tan \theta$  は正の側からゼロに

近づくと、 $\theta$  はほとんど  $-\pi$  である。つまり、外力の振動が非常に速い場合には、系は外部の振動と逆位相で振動する。その中間、共鳴が生じているときには、 $\tan \theta = \infty$  なので、 $\theta$  は  $-\pi/2$  である。

強制振動の面白い例として、潮の満ち引きについて取り上げよう。潮の満ち引きは月の引力によって生じるということはよく知られている。そのメカニズムを、ここでは簡単なモデリングの下でもう少し考察してみよう。

状況を簡単にするため、地球の表面には陸地はなく一定の水深の海しかないものとし、さらに「地球が自転する」代わりに「月が一日で地球の周りを一周する」という描像を用いることにする（図 12 左）。このような設定の下で、回転する月の及ぼす引力の影響でどのように海の水が動くのかを考える。

潮の満ち引きは一日に 2 回ある。この説明の図としてしばしば見かけるのは、図 12 中央のような絵である。月に面している側は月の引力に引かれて海水が上がる。一方、その真裏の地点でも海水が上がっている。これは、真裏に行けば行くほど月の引力が小さくなる<sup>54</sup> ためである。

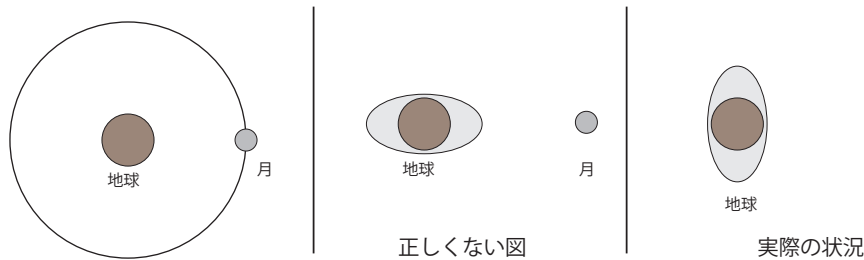


図 12: 左: 簡単のため、地球は自転せず、月が一日に一回地球の周りをまわるという描像を用いる。中: しばしば見かけるが正しくない潮汐力のイメージ図。月に面している面の海水は月の引力で引っ張られ、反対側の面の海水は月の引力が弱いことと遠心力により遠くに押しやられる。右: 実際の潮汐の状況。よくある図からは 90 度傾いている。

図 12 中央のようになっているとすると、月が真上と真裏にあるときに満潮になる（満月の日ならば、およそ 0 時と 12 時に満潮になる）と予想できる。しかし実際の潮位データ<sup>55</sup> を見るとそれとは異なる振舞いが見れる。例えば 2022 年 2 月 17 日は満月（24 時に南中）だが、この日の（日本標準時に近く外洋に面する）室戸岬の潮位（図 13）を見ると、満潮時刻は 7:00 と 18:23、干潮時刻は 0:25 と 12:37 と、ほぼ逆位相である。状況を図で描くと図 12 右のような状況である。

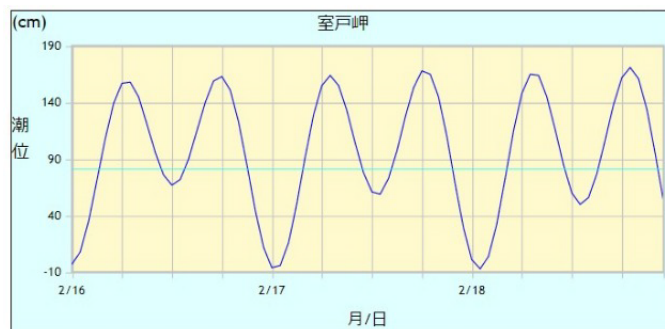


図 13: 2022 年 2 月 17 日（満月）の室戸岬の潮位データ。気象庁の潮位データのページ（<https://www.data.jma.go.jp/kaiyou/db/tide/suisan/suisan.php>）より引用。

この現象は、強制振動の一つとしてよく理解できるものである。月は 12 時間で地球を半周する。これが強制振動の振動数  $\Omega$  を定める。一方の固有振動数  $\omega$  は、海の水がどれだけの速さで地球上を伝わっていくかによって定まる量だが、これを見積もるには外部からの衝撃によって海面に著しい変化が生じたときに、

<sup>54</sup> より正確には、水に働く力には、月の引力と「月-地球合成系の公転による、地球に働く遠心力（これは月から遠ざける向きに働く）」があり、この二つの合力を考えると、月に近い面では月側に、月に向いてない面では月と逆側に力が働いているためである。なお、この公転は、単純化モデルの公転ではなく、1 か月に一度月が地球の周りを回ることによる公転のことである。月の重さは地球のおよそ  $\frac{1}{81}$  なので、月-地球合成系の重心は月と地球の間を 1 : 81 に分けた点であり、地球はその点を 1 か月かけて一周している（重心座標から見た二体の回転運動は 6 章で詳しく解説する）。その回転運動による遠心力のことである。

<sup>55</sup> 気象庁の潮位データのページ（<https://www.data.jma.go.jp/kaiyou/db/tide/suisan/suisan.php>）から見れる。なお湾内の観測点は湾の形状などの地理的影響を受けやすいので、外洋に直接面している観測点の方が今見たい効果は見やすい。

それがどの程度の速さで遠方に伝わるかを考えるのがよい。典型例は津波で、1960年チリ地震は日本のほぼ真裏のチリで発生し、地震発生から約24時間後に日本に津波が到達した。なので大雑把な見積もりとしては、固有振動に従うと海の水は24時間で地球を半周する。なので月による海の水の強制振動は $\Omega > \omega$ の状況になっており、そのため月の位置に対して海の水は逆位相になっていたのである。

#### 4.4 振動現象の近似的取扱い

重力加速度 $g$ の重力下にある、先端の重さ $m$ 、長さ $l$ の振り子の運動を考える。棒の重さは無視できるとする。振り子の鉛直方向からのずれを $\theta$ とすると、運動方程式は

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta \quad (4.44)$$

で与えられる。高校までだと振り子は単振動だと習ったかもしれないが、それは右辺において $\sin \theta \simeq \theta$ という近似を行ったためである。この近似は、 $\theta$ が小さい領域ではよい近似であるが、それでもあくまでも近似である。そこで、 $\theta$ が小さいという状況はそのままとして、近似精度をより高める方法を考えよう。

$\theta$ の大きさを $\varepsilon \ll 1$ 程度とする。 $\theta$ を

$$\theta(t) = \varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \varepsilon^3\theta_3(t) + \dots \quad (4.45)$$

と展開して、これを式(4.44)に代入して $\varepsilon$ の同じ次数同士の係数比較をして逐次的に $\theta_n(t)$ を求めてみよう。 $\sin x$ をテイラー展開すると $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$ なので

$$ml \frac{d^2}{dt^2}(\varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \varepsilon^3\theta_3(t) + \dots) = -mg(\varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \varepsilon^3\theta_3(t) + \dots) + \frac{mg}{6}(\varepsilon\theta_1(t) + \varepsilon^2\theta_2(t) + \dots)^3 + \dots \quad (4.46)$$

となる。

$\varepsilon$ の一次と二次で係数比較すると、それぞれ

$$ml \frac{d^2}{dt^2}\theta_1(t) = -mg\theta_1(t) \quad (4.47)$$

$$ml \frac{d^2}{dt^2}\theta_2(t) = -mg\theta_2(t) \quad (4.48)$$

なので、解はそれぞれ

$$\theta_1(t) = A_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t \quad (4.49)$$

$$\theta_2(t) = A_2 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B_2 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t \quad (4.50)$$

である(ただし $\theta_2(t)$ については、 $\theta_1(t)$ に繰りこんでしまうことが多い<sup>56</sup>)。

非自明になるのは $\varepsilon$ の三次の係数比較である。これによって得られる微分方程式は

$$ml \frac{d^2}{dt^2}\theta_3(t) = -mg\theta_3(t) + \frac{mg}{6}(\theta_1(t))^3 = -mg\theta_3(t) + \frac{mg}{6} \left( A_1 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B_1 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t \right)^3 \quad (4.51)$$

である。ごちゃごちゃしているが、最右辺第二項は $t$ の関数であるため、これは非斉次項である。そのためこの方程式は「 $\theta_3(t) = A_3 \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t + B_3 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t$  + 特解の一つ」という形で解くことができる。後は機械計算なので細かい議論は省略し、結果のみ記す。始状態 $t=0$ で初速度ゼロ( $\dot{\theta}(0)=0$ )とすると、 $A_1=0$ であり、非斉次項を解くと

$$\theta_3(t) = B_3 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}t - \frac{gB_1^3}{192l} \cos 3\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{gB_1^3}{16l}t \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t \quad (4.52)$$

<sup>56</sup>  $A_1 + \varepsilon A_2$ を改めて $A_1$ と、 $B_1 + \varepsilon B_2$ を改めて $B_1$ と見れば、 $\theta_2$ の項は不要になる。

と解が得られる。これを繰り返していくことで、原理的には  $\varepsilon$  の高次まで  $\theta$  の解を導ける<sup>57</sup>。

外部から素早い振動を加えることで、不安定な点を安定な点に変えることができる場合がある。その具体例として、振り子を支点の真上にした状況を考えることにしよう (図 14)。この点はそのままでは不安定である。これに外部から強制振動を加えることを考える。振り子の角を  $\theta$  とすると、このような系の運動方程式は

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\partial U(\theta)}{\partial \theta} = f(\theta) \sin \Omega t \quad (4.53)$$

という形で書ける。ただしここで  $\theta = 0$  は振り子が真下にある状況、 $\theta = \pi$  は振り子が倒立して真上にある状況であり、 $l$  は振り子の長さである。左辺がこのような形になるのは、次のように理解できる。 $l\theta$  が振り子の移動距離であることを考えれば、外力なしの場合の運動方程式は  $y = l\theta$  と置いて  $m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial U(y)}{\partial y}$  と書けるはずで、これの全体に  $l$  を掛けて積分すると式 (4.53) 左辺が得られる。

右辺の  $f(\theta) \sin \Omega t$  は外部振動による外力を表す項であり、詳細はあとで議論する。 $f(\theta)$  は外部振動の振幅 (一般に角度  $\theta$  に依存) を与える関数で、振動のさせ方を具体的に定めることで関数  $f$  の具体形が定まる。また、後に見るように、自然な設定では  $f(\theta)$  は  $l$  の一次の項でもある。これは、全体を  $l$  で割る (変数を角度から距離に直す) と、外力の影響は振り子の長さに依存しなくなるということを意味しており、振り子の支点の振動の大きさは  $l$  に依存せず、それに引きずられる形で振り子の先端も振動することを思い出せばそれなりに自然な帰結である。今は特に、強制振動の振幅  $f$  は小さいが、その振動数  $\Omega$  は非常に大きい状況を考えることにしよう。これは「カピッツァ<sup>58</sup> の振り子 (Kapitza's Pendulum)」と呼ばれている<sup>59</sup>。

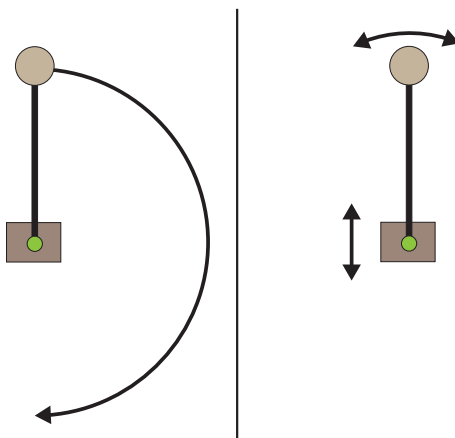


図 14: 左: 振り子を倒立させると、通常は不安定で下に回って行ってしまふ。右: 振り子の視点を素早く振動させると、倒立した状態も安定になる。

$\theta(t)$  は、ゆっくりとした平均的な動きの周りで、強制振動による微小な振動をすすると考えられる。そこで  $\theta(t)$  を、

$$\theta(t) = X(t) + \xi(t) \quad (4.54)$$

と、ゆっくりとした平均的な動き  $X(t)$  と、平均ゼロの微小な素早い振動  $\xi(t)$  に分けて解析することを考える。分解の仕方の詳細は後で定める。運動方程式 (4.53) を展開すると

$$ml^2 \frac{d^2X}{dt^2} + ml^2 \frac{d^2\xi}{dt^2} = - \left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=X} - \xi \left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta=X} + f(X) \sin \Omega t + \xi \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=X} \sin \Omega t + \dots \quad (4.55)$$

と書ける。 $X(t)$  と  $\xi(t)$  は我々が勝手に分解したものなので、我々は特に  $X(t)$  と  $\xi(t)$  の運動方程式がそれ

<sup>57</sup>ただし以前にも述べたのと同様に、ここでの解は  $t = O(1)$  の範囲でしか有効でない点に注意。特に  $t = O(1/\varepsilon)$  という長時間の挙動では摂動解は破綻し、例えばエネルギー保存則もこの時間スケールでは  $O(1)$  での破れが発生する。長時間挙動を正しく導出するには、次でも少し触れる「多重尺度法」などの高度な摂動法を用いる必要がある。

<sup>58</sup>ピョートル・カピッツァ (Pyotr Kapitza: 1894-1984) はロシアの物理学者。当時のソ連の政権に協力的でなかったために自宅軟禁されていた際、自宅の物置小屋でもできる物理研究の一つとして、このような振動を受けた振り子の研究を行った。

<sup>59</sup>実験の動画が「Kapitza's Pendulum」(<https://www.youtube.com/watch?v=cjGqx79ITI>) で見れる。

それ

$$ml^2 \frac{d^2 X}{dt^2} = - \left. \frac{dU}{d\theta} \right|_{\theta=X} - \xi \left. \frac{d^2 U}{d\theta^2} \right|_{\theta=X} + \xi \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta=X} \sin \Omega t + \dots \quad (4.56)$$

$$ml^2 \frac{d^2 \xi}{dt^2} = f(X) \sin \Omega t + \dots \quad (4.57)$$

で与えられるとして問題ない（そのように  $X$  と  $\xi$  を定義する）。

$f(X)$  の典型的な大きさは微小量  $O(\varepsilon)$  である状況を考えている。しかしもう一つ  $1/\Omega$  という微小パラメータもあり、これはタイムスケールの分離（速いダイナミクスと遅いダイナミクス）を与えている。強制振動の項と  $\xi(t)$  は「大きさは微少（ $O(\varepsilon)$  など）だが速いタイムスケールのダイナミクス」を与えるものであり、式 (4.57) がこれを記述している。これに対し、 $X(t)$  は「 $O(1)$  の大きさの遅いタイムスケールのダイナミクス」を与えるものであり、式 (4.56) がこれを記述している。系統的な摂動論としては、これは特異摂動（singular perturbation）と呼ばれるタイプの摂動<sup>60</sup> であり、今まで見たシンプルな摂動法よりもかなり難しい。ここでは系統的な取り扱いではなく、個別的な処理で最低次の結果を導く方針で計算を進める。

$\Omega t$  のタイムスケールでは、 $X$  の変化は非常にゆっくりなので、 $f(X)$  はほぼ定数とみなせる<sup>61</sup>。 $|\xi(t)|$  は微小（ $|\xi(t)| \ll |X(t)|$ ）である一方、その微分は  $\Omega$  という大きな係数を持つ（ $\frac{d^n \xi(t)}{dt^n} = O(\Omega^n)$ ）ことに注意する。 $f(X)$  を定数とみなせば、式 (4.57) は直ちに解けて、 $\xi(t)$  の時間発展は

$$\xi(t) = - \frac{f(X)}{ml^2 \Omega^2} \sin \Omega t \quad (4.58)$$

となる。

$\xi(t)$  は解けたので、この解を代入すれば式 (4.56) は  $X(t)$  のみの式となる。高速微小振動については時間平均をとることにすると、 $\xi(t)$  の時間平均はゼロ（ $\overline{\xi(t)} = 0$ ）なので右辺第二項はゼロとなり、残りについては

$$ml^2 \frac{d^2 X}{dt^2} = - \frac{dU}{dX} - \frac{f(X)}{ml^2 \Omega^2} \frac{df}{dX} \overline{\sin^2 \Omega t} = - \frac{dU_{\text{eff}}}{dX} \quad (4.59)$$

と書ける。ただしここで有効ポテンシャルを

$$U_{\text{eff}}(X) := U(X) + \frac{f(X)^2}{4ml^2 \Omega^2} \quad (4.60)$$

で定義した。また第二項目を導く際、 $\overline{\sin^2 \Omega t} = \frac{1}{2}$  を用いた。有効ポテンシャルの第二項は、微小振動に伴う平均運動エネルギーである。位置  $X$  に依存して微小振動の平均運動エネルギーが変わるので、そのエネルギーの寄与まで組み込んで「ポテンシャル」とみなそう、というのが有効ポテンシャルの考え方である。

さて、長さ  $l$ 、支点の振動振幅  $a$  のカピッツァの振り子の設定では、

$$U(\theta) = -mgl \cos \theta \quad (4.61)$$

$$f(\theta) = -ma l \Omega^2 \sin \theta \quad (4.62)$$

である（式 (4.62) は、その絶対値が  $\theta$  が  $0$  および  $\pi$  で小さくなり  $\frac{\pi}{2}$  に近づくほど大きくなるような関数であれば、詳細はあまり重要でない。この形になることは、7章でラグランジアンを導入した後に示す）。これを式 (4.60) に代入すると

$$U_{\text{eff}}(X) = -mgl \cos X + \frac{ma^2}{4} \Omega^2 \sin^2 X \quad (4.63)$$

となる。振り子が倒立した状況は  $X \simeq \pi$  なので、この近傍での安定性を考えることにしよう。 $X = \pi + \Delta X$  として  $\Delta X$  の二次まで展開すると

$$U_{\text{eff}}(\Delta X) \simeq mgl + \left( -\frac{mgl}{2} + \frac{ma^2}{4} \Omega^2 \right) \Delta X^2 \quad (4.64)$$

<sup>60</sup>特に「多重尺度法（multiple-scale analysis）」の典型例とされている。これは、 $\tau = \Omega t$  という新しい時間パラメータを導入したうえで、共鳴項が消えるように順次パラメータをいじりながら 2 変数の摂動展開を進める方法である。

<sup>61</sup>高次まで摂動をしたいのならば、 $X$  の変化について  $1/\Omega$  を微小量とする摂動としてべき展開し、処理を進める。

なので、

$$a^2\Omega^2 > 2gl \quad (4.65)$$

の条件が満たされていれば、 $\Delta X^2$  の係数が正となり  $\Delta X = 0$  で安定、つまり振り子は倒立した状態で安定になることが分かる。

#### 4.5 <補論>：パラメータ共鳴

前の節では、外部から振動を加えることで不安定な状態を安定な状態にする方法を見た。ここでは逆に、外部からの振動で安定な状態を不安定な状態にする方法を見よう。この状況の物理的な代表例はブランコである。ブランコは、何もしなければ真下にとどまるのが安定解である。しかしブランコをこぐと、真下にとどまるのではなく前後に振動する状況が実現する。これは、もともと安定解だった「ブランコが真下にとどまる」が不安定化したことを意味している。

ここでは、振動外力を加えるのではなく、系の固有振動数そのものが時間とともに変化する状況を考えよう。特に、固有振動数自体が振動する状況

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f(t)^2x(t) = 0 \quad (4.66)$$

を考えよう。この運動方程式において、一切振動を行わずに原点にとどまっている状況  $x(t) = 0$  は常に解である。 $x(t) = 0$  から少しずれた際に、そのずれが増幅するかによって、この解の安定性が分かるので、それを調べよう。解析的に取り扱いやすくするため

$$f(t) \begin{cases} \omega_+ := \omega + \varepsilon, & 0 \leq t < \tau \\ \omega_- := \omega - \varepsilon, & \tau \leq t < 2\tau \end{cases} \quad (4.67)$$

であり、 $f(2\tau + t) = f(t)$  という周期性を持つ状況を考える<sup>62</sup>。特に固有振動数の変動幅  $\varepsilon$  は小さい状況 ( $\varepsilon \ll \omega$ ) を考える

この場合、各区間ごとに時間発展は厳密に解くことができる。時間幅  $\tau$  で離散化して漸化式として書くと、行列を用いた表示で

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin \tau\omega_+ \\ -\omega_+ \sin \tau\omega_+ & \cos \tau\omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ \dot{x}(0) \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

$$\begin{pmatrix} x(2\tau) \\ \dot{x}(2\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_- & \frac{1}{\omega_-} \sin \tau\omega_- \\ -\omega_- \sin \tau\omega_- & \cos \tau\omega_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\tau) \\ \dot{x}(\tau) \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

と書ける。二つの行列の積を

$$A := \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_+ & \frac{1}{\omega_+} \sin \tau\omega_+ \\ -\omega_+ \sin \tau\omega_+ & \cos \tau\omega_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \tau\omega_- & \frac{1}{\omega_-} \sin \tau\omega_- \\ -\omega_- \sin \tau\omega_- & \cos \tau\omega_- \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

と書くことにする。すると、 $\mathbf{x}_n := \begin{pmatrix} x(2\tau n) \\ \dot{x}(2\tau n) \end{pmatrix}$  と置くと

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n \quad (4.71)$$

である。ここで、適切なベクトル  $\mathbf{v}_\pm$  と数  $\lambda_\pm$  が存在し、 $A$  の作用は

$$\lambda_\pm \mathbf{v}_\pm = A\mathbf{v}_\pm \quad (4.72)$$

<sup>62</sup>  $f(t)^2$  の代わりに  $\omega^2(1+f \sin \Omega t)$  という振動数変化をする場合もよく取り扱われる。この場合はマテウ方程式 (Mathieu equation) と呼ばれる。マテウ方程式のパラメータ共鳴の解析は、例えばランダウ、リフシッツ『力学 (第3版)』§27 などに出ている。



と書けるという事実を利用する<sup>63</sup>。これを用いると、初期状態が  $\mathbf{x}_0 = c_+ \mathbf{v}_+ + c_- \mathbf{v}_-$  と展開出来ていたとすると、一般の  $n$  における値は

$$\mathbf{x}_n = c_+(\lambda_+)^n \mathbf{v}_+ + c_-(\lambda_-)^n \mathbf{v}_- \quad (4.73)$$

と書けることが分かる。 $\lambda_{\pm}$  (の少なくとも一方) の絶対値が 1 より大きければ、 $\mathbf{x}_n$  は  $n$  が大きくなるにつれて安定点  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  から離れていき、逆に両方とも絶対値が 1 以下ならば  $\mathbf{x}_n$  は離れていかない<sup>64</sup>。そのため、 $|\lambda_{\pm}|$  が 1 より大きいか否かを調べればよい。

固有値  $\lambda_{\pm}$  は直接計算すると

$$\lambda_{\pm} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2} \quad (4.74)$$

$$t = 2 \cos(\omega_+ \tau) \cos(\omega_- \tau) - \left( \frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} \right) \sin(\omega_+ \tau) \sin(\omega_- \tau) \quad (4.75)$$

が得られる。 $|\lambda_{\pm}|$  は  $|t| > 2$  のときに 1 を上回るの、 $|t| > 2$  となる条件を調べる。 $\varepsilon \ll \omega$  より

$$\frac{\omega_+}{\omega_-} + \frac{\omega_-}{\omega_+} = 2 + 4 \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} + O\left(\left(\frac{\varepsilon}{\omega}\right)^4\right) \simeq 2 + 4 \frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \quad (4.76)$$

と近似すると、安定不安定の境界を与える  $t = \pm 2$  の条件は

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} \cos 2\tau\varepsilon + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) \cos 2\tau\omega = \pm 1 \quad (4.77)$$

となる。ただしここで三角関数の積和の公式を用いた。

まず振動がなくなる極限、 $\varepsilon = 0$ 、の状況を考えて、式 (4.77) は

$$\cos 2\tau\omega = \pm 1 \quad (4.78)$$

となるので、整数  $k$  を用いて

$$\omega = \frac{k\pi}{2\tau}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.79)$$

で与えられる点が安定不安定の境界であることが分かる。よって  $\varepsilon$  が小さい領域では  $\cos 2\tau\omega \simeq \pm 1$  と近似できる。

式 (4.79) の近傍での  $\varepsilon$  と  $\omega$  の関係を調べよう。まず式 (4.77) 右辺が +1 の状況を考えよう。 $\omega = \frac{k\pi}{\tau} + \delta$  とすると、 $\cos$  をテイラー展開して二次までで打ち切ることで

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} (1 - 2(\tau\varepsilon)^2) + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) (1 - 2(\tau\delta)^2) \simeq 1 \quad (4.80)$$

が境界の式となる。よって

$$\delta = \pm \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\omega^2 + \varepsilon^2}} \simeq \frac{\tau\varepsilon^2}{k\pi} \quad (4.81)$$

が  $\omega = \frac{k\pi}{\tau}$  周りの  $\varepsilon - \omega$  平面の境界の広がり方である。

同様に式 (4.77) 右辺が -1 の状況では、 $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2\tau} + \delta$  とすると、

$$-\frac{\varepsilon^2}{\omega^2} (1 - 2(\tau\varepsilon)^2) + \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}\right) (-1 + 2(\tau\delta)^2) \simeq -1 \quad (4.82)$$

が得られる。-1 の場合は、+1 の場合と違って、一項目と二項目で  $\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$  がキャンセルしないことに注意す

<sup>63</sup> これは線形代数の固有値・固有ベクトルの話である。一般的な話は数学 II で習うはずである。

<sup>64</sup> 絶対値が真に 1 より小さければ、 $n \rightarrow \infty$  で  $\mathbf{x}_n$  は  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  に収束し、絶対値が 1 であれば、安定点に近づきも遠ざかりもせずに同程度の距離にとどまる。

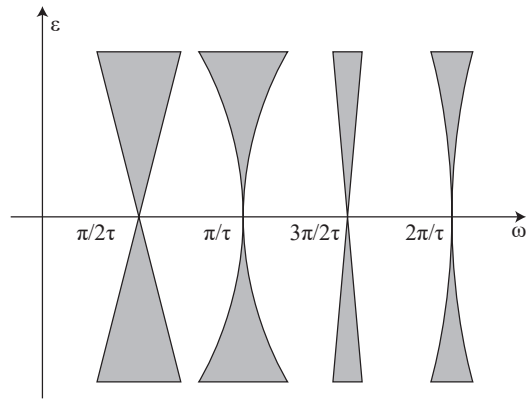


図 15: パラメータ共鳴によって不安定化が生じる領域をグレーで塗ったもの。

ると

$$\delta \simeq \pm \frac{\varepsilon}{\tau\omega} = \frac{2\varepsilon}{(2k+1)\pi} \quad (4.83)$$

が  $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{2\tau}$  周りの  $\varepsilon - \omega$  平面の境界の広がり方である。

得られた結果をまとめると図 15 のようになる。境界は、奇数番目の点の周りは線形に、偶数番目の点の周りはルートに従う。また、 $\omega$  が大きくなるほど不安定化が生じる領域の幅は狭まっていく。

## 5 中心力

### 5.1 問題設定と極座標表示

この章では、原点を中心とする中心力 (central force) の下での質点の運動を取り扱う<sup>65</sup>。中心力とは、力の向きがどの場所においても原点を向いているような力のことである<sup>66</sup>。働く力が中心力の場合、原点を基準点とした角運動量保存則が成り立つことが直ちにわかる。

原点と、質点及びそこを始点とする速度ベクトルをともに含むような平面を考えると、質点は時間発展しても常にその平面中にあることが分かる (その平面に垂直な速度ベクトルは常にゼロなので)。そのため、中心力の問題は、実際の空間次元が何次元であったとしても、二次元空間中の問題として取り扱うことができる。以下では、位置座標は二次元平面中の点  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 、あるいは極座標表示して  $\mathbf{r}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  で指定する (やや紛らわしいが、このテキストでは、太字の  $\mathbf{r}$  は位置を、太字でない  $r$  は原点からの距離を表すことにする)。

この章では、まず一般の中心力の下での運動を解析したのちに、太陽の万有引力 (逆二乗則) に従う惑星の運動を解析する。ここで、太陽の位置は一点には固定されておらず、太陽もまた万有引力の反作用に従って運動していることを気にする人もいるかもしれない。しかし太陽の運動を考慮したとしても、重心座標系に移って考える (詳細は次の章で説明する) ことにより、太陽が動く場合の惑星の運動を知るには、固定された一点からの中心力を受けた質点の運動が解析できていれば十分であることが後に明らかになる<sup>67</sup>。そのため本章では、原点向きの中心力の場合のみを考察する。

中心力の場合、 $(x, y)$  を用いた直交座標よりも、 $(r, \theta)$  を用いた極座標の方が便利である。しかし運動方程式 (1.2) は直交座標に対して定義されているので、まずこれを極座標に変換する。

位置が  $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  で表されるというのは、 $x$  方向、 $y$  方向への単位ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  とすると、 $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$  であるということと等価である。これを極座標にするために、単位ベクトルとして  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  の代わりに、動径方向のベクトル  $\mathbf{e}_r$  と、回転方向のベクトル  $\mathbf{e}_\theta$  を導入する (図 16)。そうすると質点の位置は  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  と表せる。直交座標の場合の単位ベクトルとの大きな違いは、単位ベクトル自身が質点の位置によって変化する点である。質点の回転速度が  $\dot{\theta}$  のとき、単位ベクトルの長さは 1 なので、二つの単位ベクトルはそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \quad (5.2)$$

と変化する。これを用いると、速度ベクトルは

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (5.3)$$

と書けることが分かる。もう一度時間微分することで、加速度ベクトルは

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{r}\right) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (5.4)$$

と書けることが分かる。

<sup>65</sup>本章の基本的な内容は、どの力学の教科書にも出てはいるはずである。ややアドバンスな部分については、ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学 (上) 原著第 3 版』吉岡書店を主に参考にした。

<sup>66</sup>ポテンシャル力の場合には、力が常に原点向きであるためには、力の大きさは原点からの距離にのみ依存し、角度には依存しない必要があることが導ける。

<sup>67</sup>太陽を始点とする太陽の速度ベクトルと、惑星を始点とする惑星の速度ベクトルとがねじれの位置の関係にあり、共通の平面が見るととれないような場合も、重心座標系に移るとそのような平面が常にとれることが示せる。

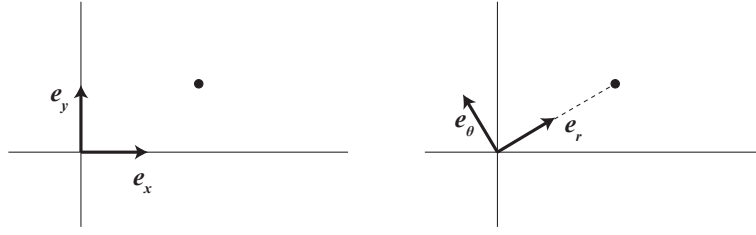


図 16: (左) xy 座標系の単位ベクトル。(右) 動径方向と回転方向に単位ベクトルをとった場合。

今は中心力場なので、働く力は  $e_r$  に沿った向きである。よって  $e_r, e_\theta$  の方向の運動方程式 (1.2) は、

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad (5.5)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (5.6)$$

とそれぞれ書ける。下の式は  $mr^2\dot{\theta} = \text{const}$  (時間によらない) と同じで、角運動量保存則を与えるものである。全角運動量を  $L$  と書くことにすると、 $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$  なので、これを式 (5.5) に代入すると、

$$m\ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[ U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \right] \quad (5.7)$$

という、 $r$  についての閉じた微分方程式になる。これは、ポテンシャルが  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  である場合の一次元運動と完全に同じ形をしている。

式 (5.7) の両辺に  $\dot{r}$  を掛けて  $t$  で積分することにより、

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = E = \text{const} \quad (5.8)$$

を得る。ただし  $E$  は時間に依存しない定数である。これはこの系におけるエネルギー保存則の式そのものである。ポテンシャルが等方的な場合には、 $U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  を右辺に移項して、 $\frac{m}{2}$  で割ったうえでルートをとることで

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2})}} \quad (5.9)$$

が得られる。両辺を積分することで形式解が得られる (右辺の積分が実効出来たら、あとは  $r$  を  $t$  の式として解けばよい)。ただし一般にはこの積分は解けない。

さて、我々が知りたいのは各時刻における質点 (惑星) の位置ではなく、質点の描く軌道である場合も多い。軌道を知りたい場合には、 $r$  を  $t$  の式としてではなく  $\theta$  の式として表す必要がある。これをするには、角運動量保存則  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$  より、時間微分の演算子が

$$\frac{d}{dt} = \frac{L}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \quad (5.10)$$

と表せることを利用する。式 (5.7) の左辺にこの表示を代入すると、 $r(\theta)$  に対する方程式

$$\frac{L}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} + \frac{L^2}{mr^3} \quad (5.11)$$

が得られる。さらに  $r = \frac{1}{u}$  という変数変換を行うと、 $\frac{d}{dr} = -u^2 \frac{d}{du}$  が成り立つので、上の方程式は

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u + \frac{m}{L^2} \frac{d}{du} U\left(\frac{1}{u}\right) = 0 \quad (5.12)$$

が得られる。この方程式が解ければ、軌道が得られることになる。

## 5.2 一般のポテンシャルの場合の軌道の性質

以下では、角運動量  $L$  が固定されている状況で、質点がどのような運動を行うのかを定性的に考察する。角運動量が与えられているという設定は、初期位置を決めた際に、角運動量が与えられた値  $L$  になるように初期速度を定めていることに対応する。

この設定で運動を解析するには、縦軸に有効ポテンシャル  $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$ 、横軸に位置  $r$  をとったグラフを用いるのが分かりやすい。例えば逆二乗則のポテンシャル  $U(r) = -\frac{k}{r}$  の場合、グラフは図 17 のようになる<sup>68</sup>。もともとのポテンシャル  $U(r)$  は原点 ( $r = 0$ ) に近づくほどエネルギーが下がるにもかかわらず、有効ポテンシャルは原点に近づくほどエネルギーが上がるのは、角運動量を  $L$  にするために原点に近づくほど速度が大きくなり、その運動エネルギーの寄与が有効ポテンシャルにはくりこまれていたためである。質点のエネルギーは

$$\text{(全体のエネルギー)} = \text{(動径方向の運動エネルギー)} + \text{(回転方向の運動エネルギー)} + \text{(質点のポテンシャルエネルギー)}$$

と書けるが、このうち後ろ二つ「(回転方向の運動エネルギー) + (質点のポテンシャルエネルギー)」が「有効ポテンシャルのエネルギー」として表されている。

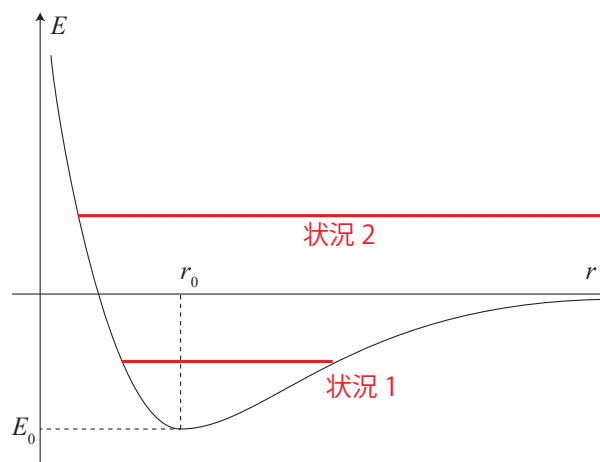


図 17:  $U(r) = -\frac{k}{r}$  の場合の有効ポテンシャルによる記述。この有効ポテンシャルは「(回転方向の運動エネルギー) + (質点のポテンシャルエネルギー)」であり、運動エネルギーも一部含まれている点に注意。

では、グラフの概形が図 17 の場合の、エネルギーごとの質点の運動を考察しよう。有効ポテンシャルは少なくとも  $E_0$  以上の値をとり、運動エネルギーは非負なので、これより低いエネルギーをとることはない。 $E_0$  の値とその際の  $r_0$  は、極値条件

$$\frac{dU(r)}{dr} - \frac{L^2}{mr^3} = 0 \quad (5.13)$$

を解くことで得られる。エネルギー  $E_0$  においては、動径方向には速度を持たず、質点は距離  $r_0$  で円運動をする。

エネルギーが  $E_0 < E < 0$  のとき (図 17 の状況 1) は、図 18 のようにとりうる  $r$  の値には上限と下限があり、 $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$  の範囲に  $r$  はとどまる。よく知る惑星の楕円軌道はこの場合に相当する。 $r = r_{\min}$  となる点を近点 (periapsis) あるいは (惑星の場合は) 近日点 (perihelion)、 $r = r_{\max}$  となる点を遠点 (apoapsis) あるいは (惑星の場合は) 遠日点 (aphelion) という<sup>69</sup>。

エネルギーが  $0 \leq E$  のとき (図 17 の状況 2) は、質点は最終的に無限遠方に飛び去っていく。このときの軌道は図 19 のようになる。

[5-1]  $U(r) = -\frac{k}{r^4}$  の場合に、同様の有効ポテンシャルのグラフを描き、エネルギーごとにどのような軌道が存在するか示せ。

<sup>68</sup>当然だが、ポテンシャル  $U(r)$  が変われば一般に有効ポテンシャルの概形も図 17 とは異なるものになる。

<sup>69</sup>惑星の周りをまわる衛星について議論する際は、惑星が地球、木星、土星の場合はそれぞれ近地点、近木点、近土点のように呼ぶこともあるらしい。

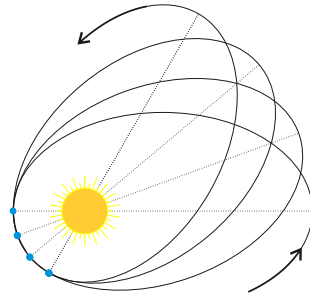


図 18: 近日点移動が生じる場合の模式図。画像は Wikipedia 「Apsidal precession」 より引用。

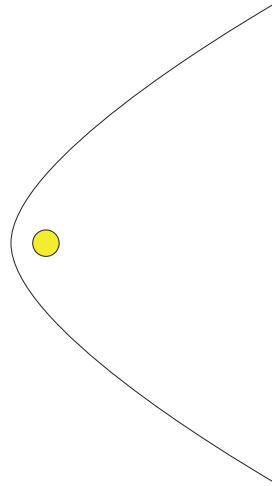


図 19:  $0 \leq E$  の場合の軌道の概形。無限遠方から飛来し、太陽のそばには 1 回だけ接近し、その後は無限遠方に飛び去っていく。

次に軌道の性質について見ておこう。一般には軌道は閉じず、近日点の位置は太陽の周りを一周するごとに動いていく (図 18)。これを近日点移動 (Apsidal precession) という。逆二乗則 (万有引力) の場合には軌道は必ず楕円軌道となり軌道は任意の初期状態に対して閉じるが、これは極めて例外的な性質である。

近日点移動の大きさがどれくらいかは、近日点から遠日点まで惑星が動く間に、どれだけの角度回転するかを計算すれば求められる。ポテンシャルが等方的な場合、式 (5.9) に角運動量保存則  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$  をかけて積分することで、近日点から遠日点に動くまでの間に

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2} U(r) - \frac{1}{r^2}}} = \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} - \frac{2m}{L^2} U\left(\frac{1}{u}\right) - u^2}} \quad (5.14)$$

だけ回転することが分かる。ただし  $u = \frac{1}{r}$ 、 $u_{\max} = \frac{1}{r_{\min}}$ 、 $u_{\min} = \frac{1}{r_{\max}}$  である。この積分は一般には解けず<sup>70</sup>、また  $\pi$  の有理数倍にもならない。後者の事実は、軌道が閉じないことを意味している。すべての初期状態において、無限遠に飛び去らないすべての軌道が閉じるような等方的ポテンシャル  $U(r)$  は、対応する力が逆二乗則 ( $U(r) = -\frac{k}{r}$ ) とフック則 (Hooke's law:  $U(r) = kr^2$ ) の二つの場合に限られることが証明されている。これは「ベルトランの定理 (Bertrand's theorem)」と呼ばれている (導出は 5.5 節の補論にて行う)。

<sup>70</sup> $U(r) = ar^{n+1}$  の形 (力が  $r^n$  に比例) を考えると、この積分の結果が三角関数で表せるのは  $n = 1, -2, -3$  の場合、楕円関数で表せるのは  $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$  の場合である (ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学 (上) 原著第 3 版』吉岡書店 3.5 章参照)。

### 5.3 逆二乗則の場合の軌道と周期

では、力が逆二乗則に従う場合 ( $U(r) = -\frac{k}{r}$ ) の軌道を求めよう。これは万有引力に従う惑星の運動に対応しており、ケプラー問題 (Kepler problem) と呼ばれる<sup>71</sup>。軌道を与える微分方程式 (5.12) に、 $U(r) = -\frac{k}{r}$  を代入すると

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u - \frac{km}{L^2} = 0 \quad (5.15)$$

という、 $u$  についての定数係数線形非斉次微分方程式が得られる。これは簡単に解けて

$$u(\theta) = A \cos \theta + \frac{km}{L^2} \quad (5.16)$$

と分かる。ただし  $A$  は任意定数である。また今ほどの向きを  $\theta = 0$  にとるかの任意性があるので、一般解  $A \cos(\theta + \theta_0)$  の  $\theta_0$  がゼロになるように向きをとった。 $u = \frac{1}{r}$  であることを思い出すと、これは

$$r(\theta) = \frac{1}{A \cos \theta + B} \quad (5.17)$$

という軌道 (円錐曲線) であることが分かる。なお、式 (5.17) は

$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos \theta) \quad (5.18)$$

の形で書くことも多く、 $e = \frac{A}{B}$  はこの円錐曲線の「離心率 (eccentricity)」と呼ばれる量である。

円錐曲線の一般論により、式 (5.17) は楕円軌道 (と放物線、双曲線) であることが分かっている。その事実を確認しておこう。楕円は「二つの焦点からの距離の和が一定値であるような点の軌跡」である。原点以外の焦点の座標を  $(-a, 0)$ 、二つの焦点からの距離の和を  $l > a$  とする。すると、余弦定理を用いることにより、点  $r = (r, \theta)$  がこの楕円状の点であることは

$$r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta = (l - r)^2 \quad (5.19)$$

を満たすことと等価である (図 20)。右辺を展開して整理すると

$$r = \frac{l^2 - a^2}{2(a \cos \theta + l)} \quad (5.20)$$

となり、式 (5.17) で  $A = 2a/(l^2 - a^2)$ 、 $B = 2l/(l^2 - a^2)$  とした場合と一致する。よって逆二乗則の力に従う質点の軌道は楕円軌道であることが確認できた<sup>72</sup>。なお、離心率を用いて表すと  $e = 0$  が円、 $0 < e < 1$  が楕円、 $e = 1$  が放物線、 $e > 1$  は双曲線である。惑星の運動が太陽を一方の焦点とする楕円軌道であるという上記の事実は、ケプラーの第一法則として知られている。

[5-2] 太陽が原点に固定されている二次元平面中の、質量  $m$  の惑星の運動を考える。惑星は太陽からの引力ポテンシャル  $U(r) = -\frac{k}{r}$  ( $k > 0$ ) を受ける。

惑星が無遠方で速さ  $v$  を持ち、太陽の方に接近してきた。惑星は、最も近づいたときに太陽まで距離  $l$  の地点に達し、その後無遠方へと飛び去って行った。「接近前の無遠方での惑星の位置」－「太陽」－「飛び去った後の無遠方での惑星の位置」のなす角度  $\phi$  ( $0 \leq \phi \leq \pi$ ) を、 $v, l, m, k$  を用いて表せ。

ここまで逆二乗則の力の下での軌道について考察してきた。以下では、運動にかかる時間について考察しよう。

<sup>71</sup>これはケプラーが惑星の軌道が太陽を一方の焦点とする楕円軌道であることを導いたことから名づけられている。ただし歴史的な順番は、まずティコ・ブラーエ (Tycho Brahe) の観測データをもとに、ケプラーが惑星の運動は楕円軌道であることを見出し、その後それを元にニュートンが万有引力の逆二乗則を見つけた、というものである。そのためニュートンが解いた問題は、このテキストで解説しているような「逆二乗則から楕円軌道を導出する」ではなく、その逆である「楕円軌道から力の形が逆二乗則であることを導く」である。このあたりの歴史的な話やニュートン自身の辿った議論については、山本義隆『古典力学の形成』日本評論社に詳しい。

<sup>72</sup>なお、双曲線は「二つの焦点からの距離の差が一定である軌道」だが、これは距離の差を  $l < a$  とすると

$$r^2 + a^2 + 2ra \cos \theta = (l + r)^2 \quad (5.21)$$

と等価であり、同様の変形により式 (5.17) で  $A = -2a/(a^2 - l^2)$ 、 $B = 2l/(a^2 - l^2)$  とした場合と一致する。結局、任意定数  $A$  が正の場合が楕円、負の場合が双曲線である。

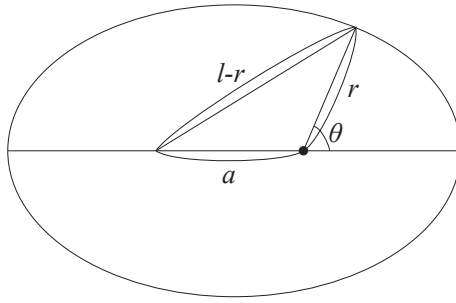


図 20: 一方の焦点 (黒丸) が原点、もう一方の焦点が  $(-a, 0)$ 、長さ  $l$  の楕円。

惑星が楕円を一周するのにかかる時間を周期 (period) という。逆二乗則における惑星の周期  $\tau$  の二乗は、その楕円軌道の長軸の三乗に比例する。これをケプラーの第三法則という<sup>73</sup>。

楕円軌道の式 (5.17) を出発点に、ケプラーの第三法則を導こう。この楕円軌道の長軸  $d_1 = l$ 、焦点距離  $a$ 、短軸  $d_2$  はそれぞれ

$$d_1 = \frac{1}{B+A} + \frac{1}{B-A} = \frac{2B}{B^2 - A^2} \quad (5.22)$$

$$a = \frac{1}{B-A} - \frac{1}{B+A} = \frac{2A}{B^2 - A^2} \quad (5.23)$$

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 - a^2} = \frac{2}{\sqrt{B^2 - A^2}} \quad (5.24)$$

と書ける (図 21)。周期  $\tau$  は、この楕円の面積  $S$  を角速度の半分<sup>74</sup>  $L/2m$  で割ったものに等しい。 $B = \frac{km}{L^2}$  であることを思い出すと、周期  $\tau$  の二乗は

$$\tau^2 = \frac{4mB}{k} \cdot S^2 = \frac{4mB}{k} \cdot \left( \pi \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{m}{k} \frac{4\pi^2 B^3}{(B^2 - A^2)^3} = \frac{\pi^2 m}{2k} d_1^3 \quad (5.25)$$

となり、周期の二乗は確かに長軸の三乗に比例している。特に万有引力の場合は、 $G$  を万有引力定数、 $M$  を太陽の質量として  $k = GmM$  なので、比例定数は太陽質量のみに依存し惑星の詳細に一切よらない定数となる<sup>75</sup>。

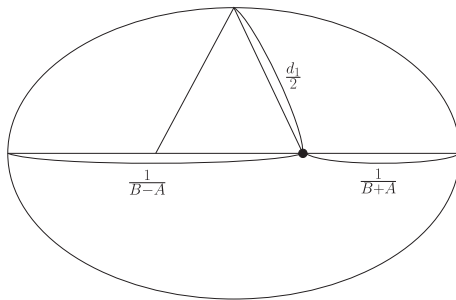


図 21: 式 (5.17) から長さを入れていく。

周期の二乗が何らかの長さスケールの三乗に比例することは、次元解析だけから見出すことができる。逆二乗則の運動を規定する唯一のパラメータは  $GM$  である<sup>76</sup> が、この次元は  $L^3/T^2$  である (この  $L$  は角運動量ではなく長さの次元)。そのため、時間の次元を持つ周期  $\tau$  の二乗は、長さの次元を持つ量の三乗と結びつく必要がある。ただし、楕円を特徴づける長さは長軸と短軸の二つがあるので、この二つの 3 次の関数であることは分かるが、長軸の長さのみに依存し短軸の長さには依存しないことまでは次元解析ではわからない。

<sup>73</sup>なお、ケプラーの第二法則は角運動量保存則である。

<sup>74</sup>単位時間にはく扇形の面積は  $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|/2$  なので。

<sup>75</sup>太陽の運動も考慮したうえで重心座標から運動を記述している場合には、質量  $m$  は換算質量  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  に置き換えられるので、比例係数は惑星の質量にも依存する。ただし太陽質量  $M$  が惑星質量  $m$  に比べて十分重ければ、この依存性は実質的に無視できる。

<sup>76</sup>惑星の質量  $m$  は、運動方程式のすべての項にかかっているので落とした。



具体例として、ハレー彗星 (Halley's comet) がどの程度遠くまで行くのかを見積ろう。ハレー彗星の周期は 75.3 年である。ケプラーの第三法則により、長軸の三乗が周期の二乗に比例する。地球の軌道の長軸は 2au (天文単位：地球と太陽の距離を 1au と定義)、周期は 1 年なので、ハレー彗星の長軸は

$$2\text{au} \cdot (75.3)^{2/3} = 35.66 \cdots \text{au} \quad (5.26)$$

と計算できる。ハレー彗星の近日点は地球の軌道よりも内側にまで入るので、長軸の長さを実質的に「太陽からの最遠距離」とみなしてよい。なので、ハレー彗星は地球-太陽の距離の 35 倍ほど遠く、海王星よりも外側<sup>77</sup> まで行くと予想できる。これは、実際のハレー彗星の遠日点距離 35.082au を非常によく予想している<sup>78</sup>。

## 5.4 逆二乗則の静的な性質

これまで、逆二乗則の中心力に従う質点の運動を議論してきた。最後に、三次元空間中の逆二乗則そのものが持つ重要な性質に触れておこう。

これまで惑星や太陽は質点であるように扱ってきたが、もちろん実際には大きさがある。なので、これまでの結果は有限の大きさを考慮すると、近似的にのみ成り立つと期待するのはもっともである。ところが、実は惑星や太陽が球対称であるのならば、「星が有限の大きさを持つ場合」と「星の質量が中心一点に集中している場合」とで、生じる万有引力は全く同じであることが示せる。言い換えると、惑星や太陽の球対称性が満たされる限り、質点近似を行わなくてもこれまでの結果は厳密に成り立つということである<sup>79</sup>。

原点を中心とした半径  $d$  の球殻上に、一様密度  $\rho$  で物体が広がっている状況を考える。この物体の質量は  $M = 4\pi d^2 \rho$  である。この球殻が、原点からの距離  $\ell > d$  の質量  $m$  の質点に作る万有引力のポテンシャルを求めよう。

対称性より、質点は  $z$  軸上にあるとして一般性を失わない。三次元極座標を用いて球殻上の積分を実行する。 $z$  軸からの角度が  $[\theta, \theta + d\theta]$  である球面上の領域の面積は  $2\pi d^2 \sin \theta d\theta$  なので、この質点のポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U(\ell) &= \int_0^\pi d\theta 2\pi d^2 \sin \theta \frac{Gm\rho}{\sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \theta}} \\ &= 2\pi d^2 Gm\rho \left[ \frac{1}{d\ell} \sqrt{d^2 + \ell^2 - 2d\ell \cos \theta} \right]_0^\pi \\ &= \frac{2\pi d^2 Gm\rho}{d\ell} [(\ell + d) - (\ell - d)] \\ &= \frac{GMm}{\ell} \end{aligned} \quad (5.27)$$

となり、原点に質量  $M$  の質点がある場合の万有引力のポテンシャルと一致する。

なお、球殻内 ( $\ell < d$ ) の万有引力のポテンシャルエネルギーは、同様の計算により

$$U(\ell) = \frac{2\pi d^2 Gm\rho}{d\ell} [(\ell + d) - (d - \ell)] = \frac{GMm}{d} \quad (5.28)$$

となり、 $\ell$  に依存しない、すなわち球殻内部では球殻上の物質が作る万有引力は全て互いにキャンセルしてゼロ (何も物質がないのと同じ状況) になることが示せる<sup>80</sup>。これらの性質は、万有引力だけでなく電磁気学のクーロン力についても同様に成り立つ。

<sup>77</sup> 海王星の近日点距離は 29.886au、遠日点距離は 30.216au である。ちなみに準惑星の冥王星はやや離心率が大きく、近日点距離は 29.574au、遠日点距離は 49.316au である。

<sup>78</sup> ずれの理由は近日点距離を無視したからである。ハレー彗星の近日点距離は 0.586au で、この二つを足すと予想された長軸距離 35.66au にほとんど一致する。

<sup>79</sup> もちろん実際の星は正確に球対称ではないため、この仮定は完全には満たされない (例えば地球は赤道方向に膨らんでいる)。

<sup>80</sup> SF 小説でしばしば「地球の真ん中は実は巨大な空洞の空間になっている」という設定があるが、そのままだと空洞中では (近場の球殻部分に向けて重力が働くのではなく) 無重力空間になってしまい、空洞世界で通常の生活を営むことはできない (空洞世界にも地表のように人々が生活している、のような描写にしたい場合は、追加の設定が必要である)。

## 5.5 <補論>：ベルトランの定理の導出

本編で証明を飛ばした、「すべての有界な軌道が閉軌道となる等方的な中心力ポテンシャルは、 $U(r) = -\frac{k}{r}$  と  $U(r) = kr^2$  に限られる」というベルトランの定理の導出を与えよう<sup>81</sup>。

有効ポテンシャルを用いた記述を出発点にする。軌道が円軌道を描く  $r = r^*$  は、有効ポテンシャル  $U_{\text{eff}}(r)$  の微分がゼロ、すなわち

$$U'(r^*) - \frac{L^2}{mr^{*3}} = 0 \quad (5.29)$$

を満たす。初期状態として、 $r = r^*$  から少しだけずらした状態  $r = r^* + \varepsilon$  をとる状況を考えよう。すると  $r$  の方程式は、 $r - r^*$  が微小な領域ではポテンシャルを二次まで展開することで単振動とみなすことができる。特にその振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left( U''(r^*) + \frac{3L^2}{mr^{*4}} \right)} \quad (5.30)$$

と書けるので、半周期 ( $r_{\min}$  から  $r_{\max}$  までの運動) にかかる時間は  $T = \frac{\pi}{\omega}$  と求まる。軌道が半径  $r^*$  の円の場合、単位時間あたりに角度は  $L/mr^{*2}$  だけ進むので、半周期の間に角度は

$$\theta = \frac{\pi}{\omega} \cdot \frac{L}{mr^{*2}} = \frac{\pi L}{mr^{*2} \sqrt{\frac{1}{m} \left( U''(r^*) + \frac{3L^2}{mr^{*4}} \right)}} = \sqrt{\frac{\pi^2 U'(r^*)}{r^* \left( U''(r^*) + \frac{3U'(r^*)}{r^*} \right)}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{r^* \frac{U''(r^*)}{U'(r^*)} + 3}} \quad (5.31)$$

だけ進む。ただし三つ目の等号では、式 (5.29) を用いて  $L$  を消去した。

さて、軌道が円軌道であることを保つように  $r^*$  (と  $L$ ) を連続的に変えていく状況を考えよう<sup>82</sup>。このとき  $\theta$  は  $r^*$  の関数であるが、もし  $\theta$  が値を連続的に変えるのであれば、ある  $r^*$  で  $\theta$  の値は必ず  $2\pi$  と無理数比の関係になる<sup>83</sup>。この場合軌道は閉じなくなるので、任意の初期条件で軌道が閉じるという条件を満たせなくなる。よって  $\theta$  は  $r^*$  によらない定数でないといけなことが分かる。つまり、ある定数  $a$  を用いて

$$r^* \frac{U''(r^*)}{U'(r^*)} = a - 1 = \text{const} \quad (5.32)$$

が任意の  $r^*$  で成り立たないといけなということである。定数項に  $-1$  がついているのは、ポテンシャルの形をきれいにするためである。

ここで得られたポテンシャル  $U(r)$  に対する制限は、円軌道となる場合 ( $r = r^*$ ) に限らず、任意の形の軌道で成り立つ。そのため以下  $r^*$  と書いていたものを改めて  $r$  と書く。この微分方程式 (5.32) は変数分離法で解ける。 $U'(r) = -F(r)$  と置くと

$$\frac{dF}{F} = (a - 1) \frac{dr}{r} \quad (5.33)$$

であり、これを積分することで

$$F(r) = br^{a-1} \quad (5.34)$$

を得る。ポテンシャルの形で表すと、適当な係数  $k$  を用いて

$$U(r) = \begin{cases} kr^a & a \neq 0 \\ k \ln r & a = 0 \end{cases} \quad (5.35)$$

<sup>81</sup>ここでの導出は、アーノルド『古典力学の数学的方法』岩波書店の演習形式の導出の行間を埋めつつ適宜改変したものである。ゴールドスタイン、ポール、サーフコ『古典力学(上) 原著第2版』吉岡書店の付録には、これとは異なる導出が出ている(現在購入可能な第3版にはこの付録は掲載されていないので注意!)

<sup>82</sup>元々の考え方は、まず角運動量  $L$  が与えられ、そこから円軌道の半径  $r^*$  が得られるという順番であった。だがここでは逆に、まず円軌道の半径  $r^*$  を定め、そこから角運動量  $L$  を得るという順番で考えている。

<sup>83</sup> $\omega$  や  $\theta$  がポテンシャルの二次までの打ち切りという近似的な方法で導出しているのに、ここでは有理数比か無理数比かという完璧な精度が必要な議論をしている点が気になる人もいるかもしれない。しかし、この点は問題を生じさせない。なぜなら、この議論で重要なのは「 $\theta$  は  $r^*$  の関数として書けるが、その値が変化してはいけない」という点だけだからである。 $\theta$  が定数関数と分かれば、あとは  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限をとれば、本編の議論に戻る。

となることが分かる。ただし  $a \geq 0$  で  $k > 0$ 、 $a < 0$  で  $k < 0$  である。このとき、半周期で進む角度は

$$\theta = \frac{\pi}{\sqrt{a+2}} \quad (5.36)$$

である。ここから  $a > -2$  と分かる。「すべての軌道が閉じる」という条件がもし満たされているのならば、軌道を連続変形していても  $\theta$  は変化しない。なぜなら、もし値が変化するのだとしたら、 $\theta$  の変化の連続性により、変形の途中でどこかの軌道では必ず  $\pi$  の無理数倍の  $\theta$  をとることとなり、仮定に矛盾するからである。よって円軌道に近いとは限らないすべての軌道について、半周期で進む角度は式 (5.36) であることが分かる。

一般の軌道において半周期の間に進む角度は、すでに式 (5.14) で導いている。特に  $E = U(1/u_{\max}) + L^2 u_{\max}^2 / 2m$  が成り立つ。代入して整理すると

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{U(\frac{1}{u_{\max}}) + \frac{L^2 u_{\max}^2}{2m} - U(\frac{1}{u}) - \frac{L^2 u^2}{2m}}} \quad (5.37)$$

が得られる。以降は、ポテンシャルの  $a$  の値で場合分けし、計算しやすい（極限的な）状況設定で  $\theta$  を計算し、式 (5.36) との整合性を検討することで、すべての軌道が閉じるような  $a$  の値を導く<sup>84</sup>。

まず  $a \geq 0$  の場合を求めよう。式 (5.37) を出発点に、 $u = yu_{\max}$  と置換し、 $u_{\max} \rightarrow \infty$  の極限をとる。この極限は  $E \rightarrow \infty$  の状況に対応する。すると積分は

$$\theta = \lim_{u_{\max} \rightarrow \infty} \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_{y_{\min}}^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{u_{\max}^{a+2}} + \frac{L^2}{2m} - \frac{k}{u_{\max}^{a+2} y^a} - \frac{L^2 y^2}{2m}}} \quad (5.38)$$

となる。ルートの中の一項目はこの極限で明らかにゼロになる。注意が必要なのは三項目である。 $y = O(1)$  の場合には、この項は  $u_{\max} \rightarrow \infty$  の極限でゼロになり無視してよい。だが  $y_{\min} \sim u_{\max}^{-2/a-1}$  であり、特に  $y = y_{\min}$  においてはこの項は第二項と等オーダーの量になり、ルートの中身は発散するが積分は収束するという広義積分の状況である。そのためこの項の寄与が無視できるかは自明でないが、発散の仕方を評価する<sup>85</sup> と、 $u_{\max}$  が大きくなるにつれて広義積分の幅がどんどん狭くなり、 $u_{\max} \rightarrow \infty$  の極限で広義積分の値がゼロになる。そのため結局式 (5.38) の積分は

$$\theta = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} \quad (5.41)$$

と解ける。ただし途中の積分では  $y = \sin x$  と変数変換した。式 (5.36) とこの値を比較することで、 $a = 2$  のみがこの条件を満たすことが分かる。

次に  $0 > a > -2$  の場合を考えよう。今度は式 (5.14) まで戻って考える。 $u_{\min} \rightarrow 0$ 、 $E \rightarrow -0$  の極限をとると、ルートの中の第一項は消える。また  $E = 0$  のとき、 $u_{\max} = (2mk/L^2)^{1/(2+a)}$  である。そのため、式 (5.37) で先程と同様に  $u = yu_{\max}$  と置換すると

$$\theta = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{k}{u_{\max}^{a+2} y^a} - \frac{L^2 y^2}{2m}}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y^{-a} - y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{-a/2} \sqrt{1-y^{2+a}}} = \frac{2}{2+a} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\pi}{2+a} \quad (5.42)$$

<sup>84</sup>円軌道の場合の  $\theta$  の式 (5.36)、及び極限的な状況で計算した  $\theta$  の式 (5.37) は、どちらも軌道が閉じるかどうかにかかわらず正しい  $\theta$  の式である。「すべての軌道が閉じる」という仮定を置くと、この二つの  $\theta$  が一致しないとけないという性質が導ける。ここから  $a$  が特定の値でないといけないことを導いている。（その他の  $a$  の場合には、 $\theta$  の値は軌道変形によって連続的に式 (5.36) から式 (5.37) へと変化していく）

<sup>85</sup>この積分は、

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \int_{1/C}^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{1}{Cy}}} \quad (5.39)$$

と本質的には同じ形の広義積分である。 $t = 1 - \frac{1}{Cy}$  と変数変換すると、この積分は

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \int_0^{1-1/C} \frac{dt}{C(1-t)^2 \sqrt{t}} \quad (5.40)$$

であり、 $t \simeq 0$  における積分の寄与は  $\frac{1}{C}$  で小さくなっていくので、 $C \rightarrow \infty$  の極限では無視できる寄与しか持たないことが分かる。

となる。ただし最後の積分では  $z = y^{1+a/2}$  と変数変換した。式 (5.36) とこの値を比較することで、 $2+a = 1$ 、すなわち  $a = -1$  のみがこの条件を満たすことが分かる。

そして  $a = 2$  及び  $a = -1$  の場合の軌道を解くと、これらの場合にはすべての軌道が閉じることが直接確認できる。以上より、すべての有界な軌道が閉じる等方的なポテンシャルは、 $U(r) = -\frac{k}{r}$  と  $U(r) = kr^2$  の二通りしかないことが示された。

## 5.6 <補論>：ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル

我々は既に、逆二乗則の場合にはすべての軌道が閉じること、これは極めて例外的な現象で一般には近日点移動が生じること、を見た。近日点移動が生じないことは、実は保存量の存在として示すことができる。運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.43)$$

で与えられ、エネルギーと角運動量

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{k}{r} \quad (5.44)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.45)$$

が保存する。変数は  $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$  の6つなので、これら（エネルギー保存則＋3方向の角運動量保存則）に加えてもう一つ保存則が見つければ、運動が完全に指定される。そして、これら以外にもう一つ、「ラプラス・ルンゲ・レンツベクトル (Laplace-Runge-Lenz vector)」

$$\mathbf{A} := b\mathbf{p} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.46)$$

も実は保存量となる<sup>86</sup>。ただしここで  $b = 1/km$  である。

$\mathbf{A}$  が確かに保存することを示そう。 $\mathbf{A}$  を時間で微分すると

$$\dot{\mathbf{A}} = b\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} + b\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{L}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{1}{mr^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.47)$$

となる。ただしここで角運動量  $\mathbf{L}$  の時間微分はゼロであることを用いた。また運動方程式  $\dot{\mathbf{p}} = -k\mathbf{r}/r^3$  を代入した。右辺第一項は

$$-\frac{1}{mr^3} \mathbf{r} \times \mathbf{L} = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{1}{r^3} (\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - r^2 \dot{\mathbf{r}}) = \frac{r\dot{\mathbf{r}} - \dot{r}\mathbf{r}}{r^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (5.48)$$

となるので、右辺第二項と打ち消し合い、 $\mathbf{A}$  が保存することが分かる。ただし二つ目の等式ではベクトル三重積の公式 (2.19)、三つ目の等式では  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = r\dot{r}$  を用いた。

$\mathbf{A}$  は中心から近日点に向かうベクトルであり、 $\mathbf{A}$  が保存することの物理的な意味は、近日点が動かず軌道が閉じるということである<sup>87</sup>。このことを最後に確認しよう。まず  $\mathbf{A}$  は明らかに  $\mathbf{L}$  と直交する。なので、 $\mathbf{A}$  は運動平面中のベクトルだと分かる。一方、 $\mathbf{r}$  との内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = b(\mathbf{p} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} - r = b(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{L} - r = bL^2 - r \quad (5.49)$$

と計算できる。ただし  $L$  は角運動量  $\mathbf{L}$  のノルムである。またここでスカラー三重積の公式 (2.18) を用いた。 $\mathbf{A}$  の向きが  $x$  軸の向きになるように直交座標を設定すると、これは

$$Ar \cos \theta = bL^2 - r \quad (5.50)$$

<sup>86</sup> これだと保存則が追加で3つ（3方向分）得られて多すぎるように見えるかもしれない。だが、まずこのベクトルの向きは角運動量ベクトル  $\mathbf{L}$  と直交していることは構成から分かるので、独立な保存量は一つ減る。さらに、このベクトルの長さは、既に求まっている保存量である角運動量の大きさ  $L$  とエネルギー  $E$  から計算できる。そのため、ラプラス・ルンゲ・レンツベクトルの独立な保存量は実質的にただ一つである。

<sup>87</sup> ちなみにフック則の場合には、Demkov-Fradkin テンソルが保存量となる。

なので、 $r$  を  $\theta$  の式として

$$r = \frac{1}{\frac{1}{bL^2} + \frac{A}{bL^2} \cos \theta} \quad (5.51)$$

と書ける。これは楕円軌道の式そのものである。すなわちこれは逆二乗則の場合の軌道の導出の別解になっている。また特に  $\theta = 0$  のときが長軸方向なので、 $A$  は確かに近日点を向いている。

## 6 相対運動と座標系

この章では、運動を異なる座標系から眺めた際に、運動方程式がどのように変化するかを考える。

### 6.1 慣性系と重心座標

異なる座標系の代表例としては、慣性系 (inertial frame of reference) に対して等速直線運動する座標系

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_0 t \quad (6.1)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{v}_0 \quad (6.2)$$

が挙げられる。イメージとしては、「一定速度で直線的に動く車に乗っている人から見た座標」のようなものである。ただし、「動いている」「止まっている」というのはあくまでも特定の座標系から見た場合の話であり、絶対的な静止系は存在しない点には注意しておく。

特に位置に依存する外力が働いておらず、内力は相対位置にのみ依存する状況を考える。この場合、等速直線運動する座標系で見た場合の  $j$  番目の粒子の運動方程式は

$$m \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{v}}(t) = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) + m \frac{d}{dt} \mathbf{v}_0 = m \frac{d}{dt} \mathbf{v}(t) = \sum_i \mathbf{F}_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_i \mathbf{F}_{ij}(\tilde{\mathbf{r}}_i - \tilde{\mathbf{r}}_j) \quad (6.3)$$

となり、元の運動方程式と一致する。そのため、もし力についての上記条件が満たされていて、かつ元の慣性系で運動量保存則やエネルギー保存則が成り立つのならば、等速直線運動する別の座標系から見てもやはり運動量保存則やエネルギー保存則が成り立つ<sup>88</sup>。

特に重心座標 (barycentric coordinate) を用いた記述は便利ことが多い。重心座標は、系の重心を原点とするような座標系である。特に外力が働かない場合には、重心の運動はただの等速直線運動となり、この座標系は等速直線運動する慣性系となる。

例として、2.2 節で結果のみ紹介した、二つの物体の完全弾性衝突とエネルギー保存則の等価性を確認しよう。二つの粒子 1,2 の 1 次元衝突を重心座標系から見ると、重心が常に原点にあるという条件から

$$m_1 \tilde{v}_1 + m_2 \tilde{v}_2 = 0 \quad (6.4)$$

が成り立つ。これが完全弾性衝突であれば、衝突後の速度は

$$\tilde{v}'_1 = -\tilde{v}_1, \quad \tilde{v}'_2 = -\tilde{v}_2 \quad (6.5)$$

であり、このとき明らかにエネルギー保存則も成り立つ。逆にエネルギー保存則と運動量保存則を共に満たす衝突は、完全弾性衝突しかありえないこともすぐに分かる。

5 章では、原点に太陽が固定されている状況での中心力を扱った。そこでも少しコメントしたように、実際には太陽が固定されていなくても 5 章での議論はほぼ<sup>89</sup> そのまま成り立つ。その事実を確認しよう。惑星の位置を  $\mathbf{r}_1$ 、太陽の位置を  $\mathbf{r}_2$  とする。またそれぞれの質量を  $m_1, m_2$  とする。重心座標系から見ると、重心が原点であるという条件から

$$m_1 \mathbf{r}_1 = -m_2 \mathbf{r}_2 \quad (6.6)$$

が成り立たないといけないことが導ける。よって  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = (1 + m_1/m_2)\mathbf{r}_1$  なので、惑星の有効ポテンシャルは原点方向に

$$\tilde{U}(\mathbf{r}_1) := U\left(\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)\mathbf{r}_1\right) \quad (6.7)$$

であることが分かる。特にポテンシャルがべきの形  $U(r) = kr^a$  をしている場合には、有効ポテンシャルに

<sup>88</sup> これらの保存則は運動方程式から導かれているので、運動が同一の運動方程式で記述されるのならば、同一の関係式や保存則が得られる。

<sup>89</sup> ケプラー第三法則だけは成り立たないので「ほぼ」と書いた。

移ることは、相互作用係数を

$$\tilde{k} = k \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^a \quad (6.8)$$

とリスケールするような変換をすることに対応している。

重心座標を用いると、質点系の運動エネルギーの自然な分解を行うことができる。質点系の全質量を  $M := \sum_i m_i$ 、重心の速度を  $\mathbf{V}_G$  とする。また、慣性系から見た運動エネルギーと、重心座標系から見た運動エネルギーをそれぞれ  $K, K_G$ 、重心座標系から見た質点  $i$  の速度を  $\mathbf{v}'_i$  とする。すると運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i + \mathbf{V}_G|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i |\mathbf{v}'_i|^2 + \sum_i m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} M |\mathbf{V}_G|^2 = K_G + \frac{1}{2} M |\mathbf{V}_G|^2 \quad (6.9)$$

となり、運動エネルギーは「重心座標系から見た運動エネルギー」と「重心自身の運動エネルギー」の和であることが分かる。ここで最後の等式では、原点が重心で固定されている（変化しない）ことより  $\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}$  が成り立つことを用いた。

## 6.2 回転座標と遠心力・コリオリ力

次に、座標系が原点を中心に回転している状況を考えよう。慣性系に対する回転座標系の回転の角速度を  $\boldsymbol{\omega}$  とする。（回転軸が  $\boldsymbol{\omega}$  に沿った向きで、回転速度が  $|\boldsymbol{\omega}|$  ということ）。最初は一般の状況を考えるため、 $\boldsymbol{\omega}$  は時間依存していてもいいものとする。

記号を区別するため、この節では、 $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} := \frac{d}{dt} (\sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i)$  を「座標系の基底ベクトルの回転まで取り込んだ、ベクトル自身の時間変化」、 $\dot{\tilde{\mathbf{r}}} := \{\dot{\tilde{r}}_i\}$  を「成分表示した  $\tilde{\mathbf{r}}$  の各成分の時間微分を並べたもの」とする<sup>90</sup>。前者は慣性系から眺めたような定義で、この微分は座標系には一切よらないため  $\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \mathbf{r}$  が成り立つ。一方、後者は回転座標系に乗っている人が自身の座標系を基準に記述した定義である。回転座標系は（ $\boldsymbol{\omega}$  が定数の場合も）慣性系ではないため、後者の記述を用いた場合には「見かけの力」が発生する。（慣性系から見たら）特に質点に力が働いているわけではないが、慣性系ではない座標系の上の運動方程式として運動を記述する場合には、質点は（慣性系ではないことに起因する）補正項＝「見かけの力」を付け加えた運動方程式を満たす。

回転座標系の  $i$  方向（ $i = 1, 2, 3$  あるいは  $x, y, z$ ）の単位ベクトルは

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i \quad (6.10)$$

と回転するので、 $\tilde{\mathbf{r}} = \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$  を時間微分することで、慣性系と回転座標系の間の速度の結びつきは

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) = \sum_i \dot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.11)$$

と書ける。なお、上の式は

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}} = \dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.12)$$

と略記することも多い。

これをもう一度時間微分すると、

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i \right) + \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + \sum_i \dot{\tilde{r}}_i (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i) + \left( \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right) \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \\ &= \sum_i \ddot{\tilde{r}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i + 2 \sum_i \dot{\tilde{r}}_i (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i) + \left( \frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega} \right) \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

<sup>90</sup> この記法の区別は特に一般的なものではない。

となる。これは

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\tilde{\mathbf{r}}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.14)$$

と略記できる。そのため、もし元の慣性系での運動方程式が

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (6.15)$$

だったとしたら、回転座標系での運動方程式は

$$m\ddot{\tilde{\mathbf{r}}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}) - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}) - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\mathbf{r}} \quad (6.16)$$

と補正される<sup>91</sup>。補正項のうち、二項目は「遠心力 (centrifugal force)」、三項目は「コリオリ力 (Coriolis force)」と呼ばれる。四項目は座標系の回転の向きと速度が一定である場合にはゼロになる項である<sup>92</sup>。これらは「力」と名前はついているが、座標系が回転している場合にまるでそうした力があるかのように時間発展が記述できる「見かけの力」である点には注意しておく。

言葉で書くと、遠心力は「座標の回転によって（見かけ上）遠くに飛ばされていくように感じられる力」である（図 22）。宙返りのあるジェットコースターで、ひっくり返っているにもかかわらずジェットコースターの車体に体が押し付けられているように感じられるのは、遠心力の効果である。遠心力は高校の物理でも習ったはずで、わりとなじみ深いものであろう。

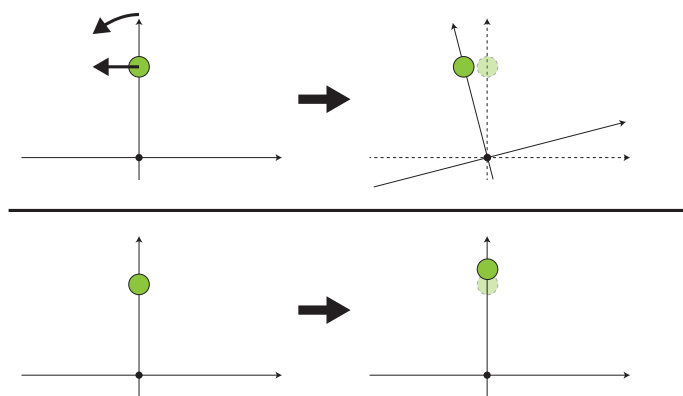


図 22: 静止系から見た場合（上）と、回転座標系から見た場合（下）。その物体の場所での回転座標の変化速度と、その物体自身の速度は一致しているとする（回転座標系から見ると、その物体は水平方向の速度を持たないように見える状況を考える）。回転座標系から見た場合には、何もない場合と比べて物体がより原点から遠ざかるような運動をしているように見える。これを補うのが遠心力である。

[6-1] 地球は完全に等方的な球体とする。赤道直下と北極を比べると、地球の自転による遠心力は重力の強さをどの程度変えるか。ただし地球一周はおよそ 4 万 km である。

一方、コリオリ力は「座標の回転によって（見かけ上）速度が次第に曲がっていくように見える力」である（図 23）。座標系が反時計回りに回転しているのであれば、運動する物体は右向きに運動がそらされるように振る舞う。これを「何らかの力が働いた結果だ」として解釈する<sup>93</sup> ために導入されているのがコリオリ力である。

台風は、中心の低気圧領域に向けて吹き込む風がコリオリ力によって曲げられることで生じる。北半球では地面は反時計回りに回転しているため、コリオリ力は進行方向右向きに曲げるような働きをする。その結果、台風は北半球では反時計回りに渦巻く（南半球では逆に時計回りに渦巻く）。台風はこのような仕組みで発生するため、水平方向のコリオリ力が消滅する赤道付近（緯度 5 度未満）では、台風は発生しない<sup>94</sup>。このことは、台風の経路を可視化した図 24 を見るとよく分かるだろう。

<sup>91</sup> なお、角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  は定義により回転軸そのものなので、この時間微分は回転座標系から見ても元の慣性系の場合と同じ、 $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\omega}}}$  である。

<sup>92</sup> 「オイラー力 (Euler force)」という名前がついているが、そこまで一般的な呼び方でもない気がする。

<sup>93</sup> もちろん慣性系から見たら、物体はまっすぐ運動しており、ただ観測者の座標系が回転しているためにその観測者にとっては運動が曲がっていくように見えているだけである。

<sup>94</sup> ただし絶対に発生しないわけではなく、極めてまれには赤道付近で台風が発生することもある。東京大学 気候システム研究センター



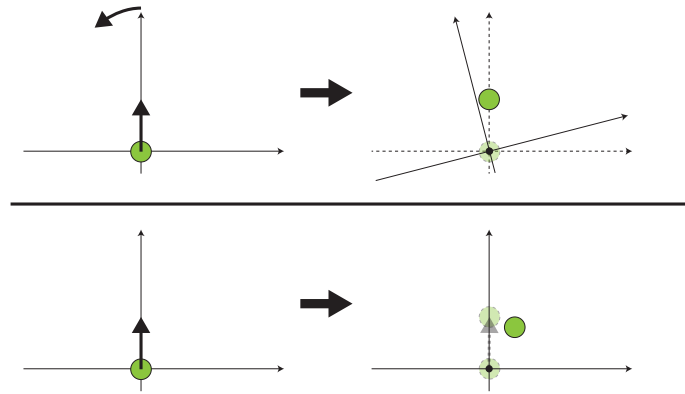


図 23: 静止系から見た場合（上）と、回転座標系から見た場合（下）。回転座標系から見た場合には、速度ベクトルが垂直方向から曲がっていくように見える。これを補うのがコリオリ力である。

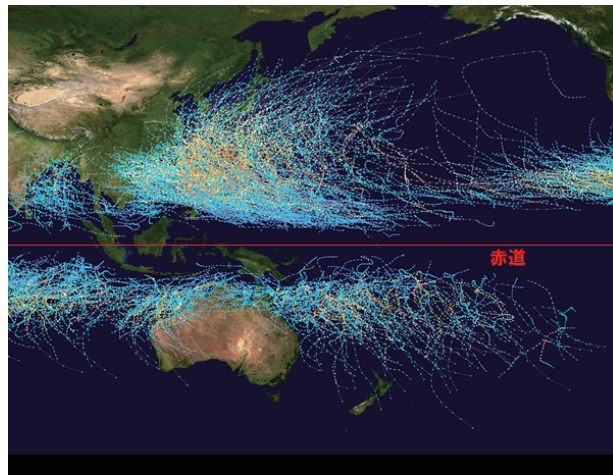


図 24: 1980 年から 2005 年までの北西太平洋上での熱帯低気圧の経路。画像は「台風が赤道上では発生しない理由」(<https://utyuu-tanosimu.net/entry281.html>) より引用。

コリオリ力のデモンストレーションとして有名な、「フーコーの振り子 (Foucault pendulum)<sup>95</sup>」を解析しよう。フーコーの振り子は大きな振り子で、コリオリ力によって振り子の振動面が次第に回転していく。振動面の回転速度は、一見すると振り子の振幅、長さ、質量、重力加速度などいろいろな量に依存しそうにも見えるが、実はコリオリ力が小さい状況では振動面回転速度はこれらの量には一切依存しない。

振り子は十分長いとして、振動面及び振動面と垂直な方向の力を線形で近似する。今、図 25 のように振動面が  $x$  軸にあるとする。振り子の長さを  $l$ 、振り子の質量を  $m$ 、重力加速度を  $g$  とすると、 $x$  方向の運動は

$$m\ddot{x} = -\frac{mg}{l}x \quad (6.17)$$

と書ける<sup>96</sup> ので、振り子が  $-R$  から  $R$  までの間を振動しているとすると、 $x$  方向の運動は

$$x(t) = R \cos \omega t \quad (6.18)$$

であると分かる。ただし  $\omega := \sqrt{g/l}$  と置いた。

座標系の回転の角速度ベクトル  $\boldsymbol{\omega}$  を地面に対して垂直成分と水平成分に  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\parallel} + \boldsymbol{\omega}_{\perp}$  と分けると、振

倉田耕輔、高橋正明「赤道付近で発生した台風 Vamei(0126 号)」(<https://www.riam.kyushu-u.ac.jp/oed/wakata/seminar/seminar.data/Library/kurata.pdf>)

<sup>95</sup> フランスの物理学者レオン・フーコー (Leon Foucault) が考案し、パリのパンテオンで実験を行った。今では上野の国立科学博物館 (東大生なら無料で入れる!) など、さまざまな科学館に設置されている。どういう挙動が見れるのかは、「フーコーの振り子 微速度撮影 (葛飾区郷土と天文の博物館)」(<https://www.youtube.com/watch?v=xLGX7WPxtBU>) の動画などで見てほしい (この動画は 24 時間を 1000 倍速再生)。

<sup>96</sup> 厳密には  $y$  方向の運動に伴うコリオリ力も働くが、それは  $x$  の運動に対しては微小なのでここでは無視している。

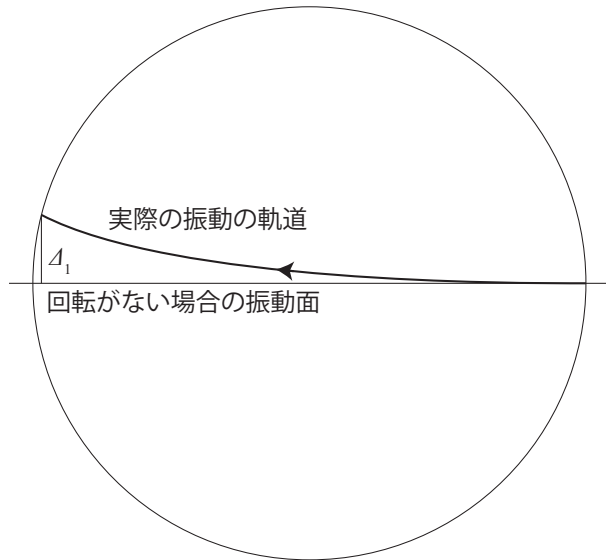


図 25: フーコーの振り子の振動の様子。回転の効果により、回転がない場合から振動面が少しずれる（この図は実際の振動面のずれを大幅に誇張して書いている）。振動面に対する垂直方向の変化を  $\Delta_1$  としている。今は  $\Delta_1$  は小さいと考えているので、 $\frac{\Delta_1}{R}$  を振動面の回転角とみなすことができる。

り子の振動面の回転に寄与するのは垂直成分  $\omega_\perp$  のみである。垂直 ( $y$ ) 方向の運動方程式は、コリオリ力の効果が加わるので

$$m\ddot{y} = -\frac{mg}{l}y - 2m\omega_\perp\dot{x} = -m\omega^2y + 2m\omega_\perp R\omega \sin \omega t \quad (6.19)$$

である。これは線形非斉次の微分方程式なので解くことが出来、

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \omega_\perp R t \cos \omega t \quad (6.20)$$

と一般解が求まる。 $t = 0$  において  $y = 0$  なので、 $C_1 = 0$  である。 $C_2$  も  $t = 0$  で  $\dot{y} = 0$  という条件から簡単に求めることが出来るが、以下の解析では  $C_2$  の値は重要でないので省略する。

振り子が  $x = R$  から  $x = -R$  まで動く半周期の間に、 $y$  方向にどれだけ動くか考えよう。 $t = 0$  から半周期後  $t = \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$  の間の変位  $\Delta_1$  は、 $\sin(\omega\tau/2) = 0$ 、 $\cos(\omega\tau/2) = -1$  より

$$\Delta_1 = y(\tau/2) = \omega_\perp R \frac{\tau}{2} \quad (6.21)$$

だと分かる。今は  $\Delta_1$  は小さいと考えているので、振り子の振動面の時計回りへの回転角の大きさは  $\Delta_1/R$  である。よって、単位時間当たりの回転角は

$$\dot{\phi} = \frac{\Delta_1}{R\tau/2} = \omega_\perp \quad (6.22)$$

と求まる。

地球は 24 時間で  $2\pi$  回転するので、フーコーの振り子の実験を北極または南極で行えば、 $\omega_\perp = \omega$  なので、24 時間で振動面はちょうど 1 回転する。一方、赤道面からの角度（緯度）が  $\theta$  の地点では、 $\omega_\perp = \omega \sin \theta$  である。例えば東京は北緯が大体 36 度、 $\sin 36^\circ = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}/4 = 0.5877\dots$  なので、東京でフーコーの振り子の実験を行うと振動面は 24 時間で大体 0.6 回転する。

[6-2] 時計回りにゆっくり一定速度で回転する円盤の上に観察者が乗っている。以下、記述はすべて円盤状の観察者から見た座標系で行う。なお空気抵抗などはないものとする。

(1) 円盤上のある地点から、ボールを回転中心に向けて発射した。回転円盤上の観察者が見たボールの軌道として適切なものを図 26 左の A~C から選べ (A: 少し左にずれる、B: ちょうど回転中心を通る、C: 少し右にずれる)。

(2) 今度はボールを真上に発射した。ボールが重力に従って落下する状況を円盤上の観察者が観察すると、ボールは発射地点から僅かにずれた位置に落下した。ボールの落下地点のずれの向きとして適切なものを図 26 右の A~H から選べ。

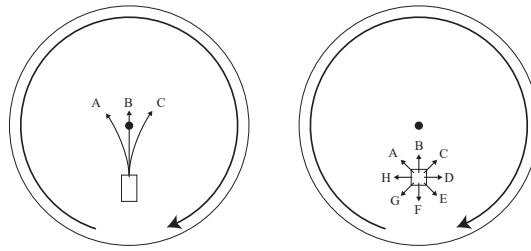


図 26: 回転円盤を真上から見たもの。ただし黒丸は回転の中心、四角はボールの発射装置である。